C. A. Laisant

La Mathématique

Philosophie
Enseignement

2e Edition

Bibliothèque générale des Sciences

rnia
al

THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA
LOS ANGELES

This book is DUE on the last date s

MAR 6 1925

HOOL
ALIFORNIA

STATE NORMAL SCHOOL,
LOS ANGELES, CAL.

BIBLIOTHÈQUE GÉNÉRALE DES SCIENCES.

LA MATHÉMATIQUE

PHILOSOPHIE. — ENSEIGNEMENT.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
38857 Quai des Grands-Augustins, 55.

13

LA

MATHÉMATIQUE

PHILOSOPHIE. ENSEIGNEMENT.

PAR

C.-A. LAISANT,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.

17064

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1907

FEB 1908

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

Engineering &
Mathematical
Sciences
Library

L14
1907

PRÉFACE.

Cette deuxième édition de *La Mathématique* est la reproduction presque textuelle de la première, publiée en 1898. Quelques corrections de pure forme, surtout dans la partie *Enseignement,* quelques suppressions légères y ont seulement été introduites pour en alléger la lecture.

Ce n'est pas que la Science mathématique n'ait progressé dans cette période des neuf dernières années. Les beaux travaux de Sophus Lie sur la théorie des groupes, ceux de M. G. Cantor sur la théorie des ensembles, notamment, ont provoqué de nombreuses recherches. Rien qu'en France, les efforts d'une pléiade de géomètres, parmi lesquels nous nous bornerons à citer MM. Borel, Hadamard, Kœnigs, Painlevé, ont contribué à élargir encore le champ de la Science mathématique.

Dans l'enseignement, quelques réformes ont été accomplies et l'on peut être certain que ce ne seront pas les dernières. On traverse une véritable période de crise, on devine que de nouvelles transformations se préparent, on sent qu'elles sont devenues inévitables.

Le mouvement vers les idées générales s'accentue de jour en jour. Parmi les mathématiciens, les plus illustres ne dédaignent pas d'y prendre part. Dans ces dernières années, M. H. Poincaré nous donne, coup sur coup, deux Ouvrages de premier ordre : *La Science et l'Hypothèse,* et *La valeur de la Science;* M. Picard publie un Livre, *La Science moderne et son état actuel,* volume dans lequel la Science mathématique

tient la plus large part; M. Borel fonde une revue nouvelle, la *Revue du Mois*, d'un caractère scientifique et philosophique à la fois. Et de leur côté les philosophes abandonnent moins que jamais le terrain scientifique et même le terrain mathématique sur lequel ils se sont solidement établis.

Rien de tout cela cependant ne m'a semblé de nature à modifier les idées principales que j'ai entrepris d'exposer en 1898. Elles conservent à mon avis leur force et leur utilité.

Bien plus, dans quelques-uns des travaux les plus intéressants qui viennent d'être mis sous les yeux du public, je trouverais presque un motif de plus, si j'en avais besoin, pour renouveler une protestation énergique en faveur des idées de simplicité et de clarté qui sont à la base de notre Science, et contre l'envahissement d'une métaphysique nébuleuse qui finirait par n'engendrer que le scepticisme.

Par exemple, au moment même où j'écris cette courte préface, je viens de recevoir un Ouvrage de M. Couturat, dont j'admire l'érudition, la puissance de travail, et pour le caractère duquel je professe la plus haute estime. Ce Livre, où est reprise et développée la doctrine de M. B. Russell, a pour titre : *Les Principes des Mathématiques*. Dans la conclusion, l'auteur déclare que « la définition traditionnelle de la Mathématique, comme science de la quantité, est unanimement abandonnée et définitivement condamnée ». Il ajoute, en citant Peirce, que « c'est à tort que l'on englobe dans la Mathématique certaines sciences déductives, comme la Géométrie et la Mécanique ».

Je ne veux pas discuter ici les idées de M. Couturat, encore moins les condamner (définitivement ou non), d'autant plus qu'elles me semblent inoffensives, à la seule condition de ne pas pénétrer dans l'enseignement. Mais il doit trouver naturel que nous ne nous laissions pas condamner par lui si facilement, avec une telle désinvolture; et il nous permettra

de maintenir devant le public notre protestation contre des théories tout au moins fort nuageuses.

J'avais pour ainsi dire prévu l'anathème lorsque j'avais écrit (p. 12) : *Toutes les Sciences sont expérimentales.*

Je tiens à répéter ici cette affirmation, ne voulant pas me dérober aux excommunications et condamnations nouvelles qui m'attendent sans doute. Et je m'en console d'avance, pour deux motifs : le premier, c'est que je serai condamné, pour une telle hérésie, en compagnie nombreuse et bonne ; le second, c'est qu'une condamnation prononcée contre moi par M. Couturat aura toujours un caractère amical et sympathique, au même degré que ma protestation elle-même.

2 ' x ' 1

LA MATHÉMATIQUE.

PHILOSOPHIE. — ENSEIGNEMENT.

17064

INTRODUCTION.

Caractère de cet Ouvrage. — Quelques explications préliminaires, en tête de ce petit livre, me paraissent indispensables. Le titre que j'ai choisi peut paraître en effet très ambitieux ou trop modeste, suivant le point de vue où l'on se place; je n'en ai cependant pas trouvé d'autre pouvant mieux traduire l'idée qui m'inspirait.

Le lecteur versé dans la culture des hautes sciences mathématiques ne trouvera probablement rien, dans les pages suivantes, qui soit de nature à l'intéresser; il n'y rencontrera pas, notamment, de ces dissertations profondes, mais parfois nébuleuses, devenues fort à la mode depuis un certain nombre d'années. D'un autre côté, les personnes n'ayant aucune préparation mathématique feront sagement de fermer immédiatement le livre sans aller plus loin; ce n'est pas un travail de vulgarisation à l'usage des gens du monde. Je fais librement usage de la langue courante usitée dans le domaine mathématique, sans m'astreindre à définir et approfondir chaque terme, sinon lorsque cela me semble indispensable pour me faire clairement comprendre; je m'attache à éviter les formules et les démonstrations géométriques, mais sans y renoncer cependant d'une manière absolue, car mieux vaut à mon avis écrire une ligne de calcul qu'une page d'explications, lorsque cette ligne suffit à rendre la pensée.

J. 4. 08

Par conséquent, je ne peux rien apprendre ici aux savants — la prétention serait excessive — et je ne saurais être compris des profanes. Il reste une catégorie, plus nombreuse de jour en jour, à laquelle je m'adresse à peu près exclusivement, et pour laquelle cet Ouvrage pourra présenter une certaine utilité. C'est celle des hommes qui étudient, qui ont étudié, qui enseignent ou qui appliquent les éléments de la Science mathématique, sans se livrer à des travaux personnels purement scientifiques. Ceux-là connaissent le langage courant, ont une notion assez précise des grandes lignes, savent de quoi il est question quand on leur parle mathématique. Mais le nombre des vérités nouvelles est devenu si grand, et dans certaines théories modernes le souci de la recherche a été poussé si loin, soit dans le fond, soit dans la forme, que la situation des hommes dont je parle n'est pas sans offrir quelques périls. Ingénieurs, ils en viennent à se demander si l'usage pratique des notions d'Algèbre ou de Géométrie qu'ils appliquent quotidiennement est bien véritablement légitime; professeurs, ils s'interrogent pour savoir s'ils ne faussent pas l'esprit de leurs élèves en continuant à leur enseigner ce qui leur fut appris autrefois; étudiants désireux de pousser plus loin, ils reculent devant l'obstacle et perdent leur foi scientifique, ébranlée par des raisonnements trop raffinés sur l'incertitude des fondements de nos connaissances.

C'est à ceux dont je parle qu'il est bon de rendre la confiance sans laquelle on ne saurait avancer; il est utile aussi de leur fournir le moyen de réfuter à l'occasion les sophismes sous lesquels on entreprend assez fréquemment d'étouffer la Science mathématique, et qui tirent habituellement leur origine, soit de l'ignorance, soit d'une connaissance trop superficielle.

La Mathématique. — Je sais qu'aujourd'hui cette appellation n'est plus en grande faveur. Ce n'est pas cependant par un simple caprice personnel que je reprends la forme de langage employée par Condorcet. Je trouve qu'ici le mot réagit fortement sur l'idée; il me semble plus que jamais utile de l'appliquer dans son énergique concision, parce qu'il explique mieux que tout autre la grande unité de la Science.

Aujourd'hui, avec les travaux accomplis au cours de ce siècle, en présence de l'immensité du nombre des découvertes, la plupart des mathématiciens sont contraints de se spécialiser et de consacrer leurs efforts, non pas seulement à une branche de la Science, mais à un simple chapitre, s'ils veulent arriver à produire des découvertes dignes d'être remarquées. C'est une nécessité dont il serait profondément injuste de les blâmer; mais cette conséquence, subie comme un mal inévitable, ne prouve rien contre l'unité fondamentale de *la Mathématique*. Nos divisions et sous-divisions, indispensables pour mettre un peu d'ordre dans la masse inépuisable des propositions, sont en résumé plus artificielles que naturelles. Même dans les plus simples éléments, lorsque nous avons tracé ainsi des limites bien nettes, nous ne tardons pas à nous apercevoir qu'il y a des régions frontières devant lesquelles notre esprit reste embarrassé. Une classification n'est jamais bonne; comme il est impossible de nous en passer, faisons-la de notre mieux, mais ne perdons pas de vue les vérités premières.

Au fond, il n'y a pas *des sciences mathématiques :* l'Algèbre, la Géométrie, etc... Toutes s'entr'aident, toutes s'appuient mutuellement et sur certains points se confondent. Il y a une vaste science, la Mathématique, que personne ne peut se flatter de connaître, parce que ses conquêtes sont infinies par nature; tout le monde en parle, surtout ceux qui l'ignorent le plus profondément. Mais, parmi les hommes qui la cultivent, même avec grande habileté, quelques-uns sont plus attentifs aux succès de détail qu'aux idées générales dont pourtant ces succès sont les conséquences. C'est dire que plus d'un mathématicien ne manquera pas de sourire en lisant ce mot tombé de ma plume, et qui lui paraîtra vieillot et suranné. Je m'y résigne d'avance, et je viens de dire la cause de cette résignation.

Philosophie. — J'ai besoin d'expliquer ce terme, par des raisons toutes contraires de celles dont l'énumération précède. Je n'ai, en effet, aucune compétence spéciale en philosophie, ni aucune prétention à me mêler des questions que j'ignore ou qui m'échappent. Mais je ne connais pas de locution, dans la langue française, qui soit employée plus que ce mot

philosophie à représenter des idées plus différentes. C'est encore ici des excès de la spécialisation, de cette division du travail poussée à l'extrême, que nous avons à souffrir. Être philosophe, de nos jours, est devenu une profession : il y faut un long apprentissage, et une habileté dans le maniement des mots, à laquelle tout le monde ne saurait atteindre, même avec beaucoup d'usage et de bonne volonté. C'est un exercice auquel j'aurais depuis longtemps renoncé, s'il m'était jamais venu à l'esprit de l'essayer, d'autant plus que le simple vocabulaire me fait défaut; condition fâcheuse, on le reconnaîtra, pour parler ou écrire une langue étrangère.

Il est assez habituel, depuis longtemps déjà, d'établir une opposition d'idées entre l'esprit du mathématicien et celui du philosophe, le premier considérant le second comme un rhéteur qui fabrique des paradoxes, et le philosophe contemplant avec une pitié hautaine un malheureux qui se croit contraint, pour pouvoir raisonner, à tracer des figures ou à griffonner des formules.

Jadis, il en allait autrement. J'ai cru pendant longtemps que Leibniz, Descartes, Pascal; que d'Alembert, Diderot, Condorcet, au XVIII^e^ siècle; qu'Auguste Comte, parmi nos contemporains, avaient été des philosophes. Quelques-uns de ceux-là, cependant, ont laissé une trace assez brillante derrière eux, au point de vue mathématique; et je doute qu'il y en ait eu un seul, parmi les noms que je viens de citer, pour regarder la Mathématique comme une science inférieure.

Ces philosophes-là, pourtant, écrivaient clairement, autant qu'il leur était possible; ils n'employaient pas de termes compliqués pour exprimer des choses simples ; ils semblaient avoir plus à cœur de faire pénétrer leur pensée dans le cerveau d'autrui que de se créer une réputation d'habiles gens. Je les ai lus avec plaisir; j'ai même éprouvé cette illusion, si c'en est une, qu'en les lisant j'apprenais quelque chose. De là m'est venue cette double conviction : qu'il n'est pas nécessaire d'ignorer la Mathématique pour bien raisonner sur les idées générales, ni de mépriser les idées générales pour être un mathématicien.

Il m'a semblé en outre que le terme de *philosophie* pouvait servir à désigner des choses qui ne se ressemblent guère, ainsi que je l'indiquais plus haut; qu'il n'était pas interdit d'en

faire usage dans un sens très restreint et très modeste; et que peut-être beaucoup d'entre nous faisaient (comme M. Jourdain de la prose) de la philosophie sans le savoir, lorsqu'il nous arrivait de méditer, ou de communiquer à ceux qui nous entourent le résultat de nos méditations.

Donc, il ne faut pas s'y tromper, j'y insiste. Le but que je poursuis est d'apporter ici des réflexions simples, de les exprimer le plus clairement possible, de me servir du bon sens et du raisonnement ordinaire, en dehors de toute préoccupation d'école, pour dire ce que je pense sur des sujets qui m'ont intéressé toute ma vie.

Si mon ambition avait été plus haute et si j'avais voulu faire œuvre savante, je me serais souvenu de cette parole de Leibniz :

« Sans les Mathématiques, on ne pénètre point au fond de la Philosophie; sans la Philosophie, on ne pénètre point au fond des Mathématiques; sans les deux on ne pénètre au fond de rien. »

A cette occasion, et pour rendre justice à qui le mérite, je dois reconnaître que depuis ces derniers temps surtout il y a eu dans l'ordre d'idées que j'indique des tentatives intéressantes, et qui méritent la plus large approbation. Les Facultés des lettres sont loin de dédaigner les travaux philosophiques empruntant une bonne part des idées au domaine mathématique; il y en a eu très récemment encore à Paris même un brillant exemple. Si ces innovations n'ont pas encore donné tout ce qu'on est en droit d'en attendre, si cette réaction salutaire, qui doit finir par ramener un peu d'unité dans la culture de l'intelligence humaine, n'est pas encore un fait accompli, la faute en est peut-être moins aux philosophes qu'aux mathématiciens modernes. A force de poursuivre une prétendue rigueur, de recherche en recherche, d'objection en objection, ils en sont venus fréquemment à jeter le doute dans leur propre esprit et dans celui des autres, à obscurcir ce qui était clair, compliquer ce qui était simple; et le résultat, en fin de compte, a été parfois une régression, plutôt qu'un progrès. C'est un sujet sur lequel j'aurai trop souvent occasion de revenir dans la suite pour qu'il soit nécessaire quant à présent de m'y appesantir.

Enseignement. — La science mathématique, à ses échelons divers, est enseignée de nos jours dans tout le monde civilisé. Je ne suis bien au courant de la question qu'en ce qui touche la France; mais, d'après le peu que je sais de ce qui se passe au delà des frontières, les différences dans le plan général et dans les méthodes ne sont pas très profondes; c'est surtout sur les détails qu'elles portent. C'est donc de l'enseignement en France que je m'occuperai surtout, n'ayant guère le goût de discourir sur les choses que j'ignore. La question est capitale, car les premières notions que nous recevons sur chaque objet sont celles qui restent le plus profondément empreintes dans notre esprit. D'autre part, le problème de l'enseignement mathématique se pose dans des conditions toutes nouvelles, au milieu de notre civilisation actuelle et du développement industriel extraordinaire, sans précédent, qui s'est accompli au cours du XIX^e^ siècle et ne s'arrêtera pas au XX^e^.

Les nécessités du véritable enseignement mathématique moderne ont-elles été comprises et s'en inspire-t-on franchement? Je ne le crois pas. Mais j'estime en même temps que nous avons en France les plus admirables éléments à notre disposition pour accomplir cette réforme, avec les qualités de travail, de bonne volonté, de dévouement, que notre corps enseignant possède à tous les degrés, depuis le plus modeste instituteur de village jusqu'aux membres de l'Institut professant à la Sorbonne ou dans nos grandes écoles.

Le jour où l'on jettera quelque bonne semence dans ce champ si bien préparé, la moisson ne tardera pas à fleurir. Il suffira de quelques indications générales, d'un appel un peu sincère aux initiatives, pour voir s'accomplir de véritables miracles. Cela ne se fera pas demain. Mais la question ne m'inquiète pas outre mesure, parce que la nécessité des choses contraindra à sortir de la routine dont nous ne sommes pas encore dégagés, et à retourner une formule qui peut sans exagération se résumer ainsi : tout attendre de la mémoire et presque rien de l'intelligence.

Je m'empresse pourtant d'ajouter dès maintenant que ce reproche ne s'applique pas à l'enseignement qu'on appelle *supérieur*, et qui répond à des nécessités particulières. C'est un sujet d'ordre social en même temps que scientifique, sur

lequel j'insiste à la fin de cet Ouvrage. Mais la déclaration que je viens de faire est à sa place, car elle a pour but d'éviter toute fausse interprétation de ma pensée.

Plan général. — Les développements que contient ce Livre se grouperont naturellement sous trois grandes divisions distinctes :

1° La Mathématique pure. — Philosophie ;
2° La Mathématique appliquée. — Philosophie ;
3° Enseignement.

Chacune de ces parties principales se subdivisera en chapitres dont on trouvera l'énumération à la table des matières, et dont les titres m'ont semblé pouvoir répondre le mieux possible aux ordres d'idées qu'il me paraissait utile d'aborder successivement.

Des explications détaillées seraient surabondantes. Je demande seulement à justifier l'opposition que j'ai établie entre la Mathématique pure et la Mathématique appliquée. Il y a ici à dissiper une équivoque des plus funestes; et, si je m'en occupe dans cette Introduction, c'est qu'il me serait impossible de le faire ensuite, sinon par voie incidente, et sous peine de sortir de mon sujet.

Le reproche le plus fréquent et le plus général adressé à l'esprit mathématique par ceux qui n'en ont pas la moindre idée, est celui-ci : « Les Mathématiques faussent l'esprit (on ajoute parfois : « et dessèchent le cœur ») ; les mathématiciens, idolâtres de leurs formules, s'imaginent qu'elles peuvent s'appliquer à toutes choses, et que chacun des problèmes de la vie peut se résoudre à l'aide d'équations. La culture mathématique engendre donc cet esprit absolu, étroit, entêté, pernicieux pour soi-même et pour autrui, parce qu'il ne sait pas tenir compte du relatif, et que tout est relatif dans le monde ».

J'ai pris à tâche de présenter l'imprécation dans toute sa vigueur, sous une forme sommaire. Je vais m'efforcer d'y répondre sans aucune passion.

S'il arrive quelquefois que les études mathématiques faussent l'esprit, c'est que l'enseignement est mauvais; il peut arriver aussi qu'un esprit soit faux par nature, et la culture

mathématique ne le redressera pas nécessairement, pas plus que l'orthopédie ne parviendra sûrement à redresser un membre incurvé. Mais comment pourrait-il arriver qu'en s'efforçant à raisonner juste on arrivât à fausser l'esprit? La Mathématique pure est un modèle de merveilleuse et impeccable logique; elle ne se trompe jamais — cela ne veut pas dire que les mathématiciens ne se trompent pas — parce qu'elle opère sur des êtres de raison, créés par l'esprit de l'homme pour les besoins de la Science elle-même, et parce que ses opérations sont liées et coordonnées entre elles d'une manière rigoureuse.

Si de cette conception idéale nous passons au plus simple des phénomènes de la nature ou de la vie, l'être de raison s'évanouit; nous avons à la place une réalité qui en est plus ou moins voisine, et voilà tout. Si donc nous estimons que nous puissions appliquer le calcul, ou la science de l'étendue, à un problème pratique ou théorique quelconque, mais appartenant à la nature réelle, non seulement nous ne pouvons prétendre à l'infaillibilité, mais c'est la Mathématique elle-même qui nous avertit que nous commettons *sûrement* une erreur. Dans quelques cas, elle nous fournit en outre le moyen de reconnaître que cette erreur est comprise entre certaines limites, et parfois enfin de réduire encore l'erreur. Il est donc bien injuste et bien illogique de lui adresser le reproche de nous jeter systématiquement dans l'absolu.

Seulement, c'est la Mathématique pure qui nous a fourni les formules ou les raisonnements infaillibles; c'est la Mathématique appliquée qui complète l'œuvre en montrant la fatalité, la nécessité des erreurs. Pour n'avoir pas suffisamment mis en lumière cette opposition, on a laissé s'accréditer les plus odieux et les plus grossiers sophismes.

La vérité c'est que, sans la Mathématique pure, l'application serait impossible, et, sans l'intervention de la Mathématique appliquée, la Mathématique pure ne peut donner de résultats exacts que dans le monde des abstractions. Est-ce que, dans tout cela, il y a rien qui puisse prouver quelque chose contre la Science mathématique elle-même? Ce qu'il en faut seulement retenir, c'est l'utilité, dès le début, dès l'enfance, d'établir nettement la distinction, et d'habituer l'esprit à raisonner juste et à ne pas se payer de chimères,

formules ou mots, quand on se trouve aux prises avec la réalité des choses.

Dans cet ordre d'idées, je ne puis non plus passer sous silence l'éternelle dispute, si souvent soulevée, et qui dure encore, entre les Lettres et les Sciences, et particulièrement entre les Lettres et la Mathématique. Les unes valent-elles mieux que l'autre ? A qui donner la supériorité ?

Autant vaudrait se demander s'il est préférable pour un homme de manger ou de dormir. Supprimez l'alimentation, ou supprimez le sommeil, et le résultat inévitable sera le même. Abolissez la culture littéraire, l'étude des étapes de l'humanité, ou bien renoncez à préparer l'homme à ce combat continuel qu'il doit livrer à la nature pour en pénétrer les secrets : et dans les deux cas vous aurez des générations pourvues de cerveaux incomplets.

Partagez votre élite intellectuelle en deux classes, à peu près comme on le fait aujourd'hui : l'une de lettrés, l'autre de savants; et vous créez deux castes de « demi-hommes » incapables de se comprendre et de comprendre le monde dans lequel ils vivent. Ici, nous y revenons encore, c'est un enseignement réformé qui seul pourra remettre de l'ordre dans ce chaos.

Observation finale. — J'en aurai terminé avec cette trop longue Introduction, lorsque j'aurai eu le soin, comme c'est mon devoir, de prévenir le lecteur de deux choses : la première, c'est qu'il ne rencontrera ici aucune trace d'érudition; la seconde, c'est que les idées que je développe en toute liberté n'engagent et ne sauraient engager que moi.

Il a été tellement écrit sur le sujet que je traite, depuis la tentative si remarquable d'Auguste Comte dans sa *Philosophie positive,* que l'on pourrait, avec quelques recherches patientes, et sans rien dire que d'utile, produire plusieurs gros volumes. Le temps me ferait défaut pour un tel labeur: et, de plus, ce serait en contradiction avec le but que je poursuis et que j'ai essayé d'indiquer ci-dessus.

Si quelques citations viennent au hasard sous ma plume, ce ne sera donc qu'accidentellement. Pour éviter l'écueil que je signale, je me suis même attaché à éviter de relire ce que j'ai lu jadis; la tentation de commenter ou de discuter pou-

vait être assez vive. Un petit Ouvrage comme celui-ci, je l'ai cru du moins, gagnera à être présenté avec le moins d'appareil et de solennité; composé sur des réflexions et grâce à quelques souvenirs, il doit être considéré comme une sorte de causerie sans prétention, plutôt que comme un livre grave.

En un temps où l'on voit tant de doctes dissertations sur des sujets légers ou futiles, pourquoi ne serait-il pas permis de laisser un peu courir sa plume sur un sujet sérieux, ne fût-ce que pour rétablir l'équilibre ?

Beaucoup me blâmeront, parce que je heurte des courants d'opinions qui paraissent être de mode; quelques-uns me discuteront, ce que je désire; un petit nombre de lecteurs réfléchiront après avoir lu; et c'est le seul but que je poursuive. Mais tous reconnaîtront, je l'espère, que, sans orgueil immodéré, sans vouloir non plus établir un rapprochement qui serait envers le grand Montaigne une sorte d'ironie injurieuse, j'ai le droit de dire, comme lui, que « ceci est un livre de bonne foi ».

LA MATHÉMATIQUE PURE.

PHILOSOPHIE.

CHAPITRE I.

LA MATHÉMATIQUE ET SES SUBDIVISIONS.

Essais de définitions. — C'est le propre des idées très générales de se prêter difficilement à une définition, par l'excellente raison que, pour définir, il faut employer des mots, et que la signification exacte des mots employés n'apparaît, claire et précise, qu'après l'étude même de l'objet à définir. Cependant, l'esprit humain a une tendance générale à vouloir expliquer les choses *a priori;* c'est une sorte de besoin logique. Aussi n'est-il pas étonnant que d'innombrables définitions de la Science mathématique aient été proposées, quelques-unes par les génies les plus éminents, et que cependant aucune de ces définitions ne puisse résister à la critique :

« La Mathématique est la science des grandeurs ».
« Elle a pour objet la mesure des grandeurs ».
« Elle étudie l'ordre et la mesure ».
« Elle se propose l'étude du nombre et de la forme ».

Nous nous bornons à ce petit nombre d'exemples; ils suffisent à montrer que l'obstacle est infranchissable, tenant à la nature même des choses. Toutes ces définitions sont bonnes pour qui possède à l'avance certaines notions mathématiques.

générales. Aucune n'apprendra rien à celui qui ignore totalement ces notions, parce que les mots *grandeur, mesure, ordre,* par exemple, n'auront pas pour lui un sens exact et précis.

En essayant de pousser plus loin, et de greffer définitions sur définitions, on parvient à des résultats bien pires. C'est ainsi que, voulant faire comprendre ce que c'est qu'une grandeur ou une quantité, on en est arrivé à rendre pour ainsi dire classique, dans l'enseignement le plus élémentaire, cette formule vaine et pernicieuse : « On appelle *grandeur* ou *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution ». Comme si la distance entre deux points fixes n'était pas une grandeur! Comme si l'estime et l'amitié que l'on a pour une personne, l'enthousiasme, l'admiration, la haine, toutes les manifestations morales, qui sont assurément susceptibles d'augmentation ou de diminution, pouvaient être raisonnablement classées au nombre des grandeurs mathématiques!

Il faut donc se résigner à l'avance à ne posséder aucune définition parfaite de la Mathématique. Mais, à défaut de la définition rigoureuse, on peut et l'on doit chercher, dans toutes les tentatives auxquelles on s'est livré dans cet ordre d'idées, un moyen de pouvoir faire comprendre, au moins d'une manière approximative, l'esprit général et le but essentiel de la Mathématique.

Origine expérimentale. — Au risque de surprendre et peut-être d'indigner certains philosophes, je me permets d'énoncer tout d'abord cet axiome :

Toutes les sciences sont expérimentales.

C'est, en somme, la reproduction de la formule célèbre : « Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens ». La Mathématique, pas plus qu'aucune autre science, n'échappe à la loi commune. J'estime que, sans la présence du monde extérieur, aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme; et que, seul dans l'univers et réduit à l'état de pure intelligence, le plus incomparable génie n'arriverait jamais à la notion du nombre 2, ce génie fût-il celui d'un Archimède, d'un Gauss et d'un Lagrange.

Ce qui distingue la Mathématique des autres sciences, c'est qu'elle emprunte à l'expérience, au monde extérieur, un minimum de notions. Et, une fois cette première base établie, par la seule puissance de la logique, elle édifie sur ces fondations un monument d'une incomparable splendeur, et dont le couronnement ne sera jamais atteint.

Mesure et nombre. — En somme, nous vivons. Nous avons autour de nous des objets; l'idée de comparer ces objets les uns avec les autres, de considérer les groupes qu'ils nous présentent, est naturelle à l'homme, et s'est assurément offerte à lui dès les premiers âges. Une observation attentive nous révèle qu'il n'existe pas d'objets exactement pareils; mais, par une opération de l'esprit qui ne demande aucun effort, bien qu'elle renferme à elle seule tout le secret de l'abstraction mathématique, nous assimilons entre eux les objets qui paraissent se ressembler, et nous renonçons momentanément à l'examen des différences qui les distinguent les uns des autres. De là vient l'origine du calcul; l'action de *compter* semble en général toute simple à ceux-là mêmes qui sont le moins mathématiciens; et cependant, si nous comptons des arbres dans un parc, nous savons fort bien que les arbres peuvent être d'essences différentes, qu'ils n'ont ni la même taille, ni le même âge, ni le même nombre de branches et de feuilles. Une pincée de grains de blé est jetée sur une table; nous disons : voilà 25 grains de blé; et, si nous nous mettons à les examiner avec une loupe, nous reconnaissons que chacun d'eux a son caractère spécial qui permettrait, s'il le fallait, de le distinguer de tous les autres. Mais, par une convention naturelle et même instinctive, nous avons, sous le vocable *arbre* ou *grain de blé,* créé une abstraction indispensable.

C'est ainsi que l'opération qui a pour but de *compter* nous devient familière, à ce point qu'il n'est pour ainsi dire plus nécessaire de la définir, toute définition étant moins compréhensible que le terme lui-même. Il en est à peu près de même de la mesure. Je veux apprécier la longueur d'une poutre; j'ai une canne entre les mains; je porte successivement la longueur de ma canne le long de la poutre; je trouve qu'elle y peut être portée ainsi 12 fois, et j'énonce que la

poutre a 12 fois la longueur de ma canne, ou, pour employer tout de suite le langage mathématique, qu'elle est mesurée par le nombre 12, en adoptant la longueur de la canne pour unité. De même, pour juger de la capacité d'une bouteille, je remplis d'eau un verre, je verse l'eau dans la bouteille et, ayant répété 7 fois cette opération, je dis que la bouteille contient 7 fois un verre, ou que sa capacité est 7, celle du verre servant d'unité.

Dans ces divers exemples, l'opération est au fond la même, en dépit des apparences; nous nous attachons toujours à effectuer la comparaison de la chose que nous voulons évaluer avec une chose de même nature, que nous prenons pour *unité*. Que ce terme de comparaison soit un arbre, un grain de blé, la longueur d'un bâton ou la contenance d'un verre, que la chose à évaluer soit une collection d'objets, tels que des arbres ou des grains de blé, ou une longueur, ou une capacité, l'opération aboutit toujours à un résultat analogue; 157 arbres, 25 grains de blé, 12 longueurs d'une canne, 7 capacités d'un verre sont des *nombres,* que nous appelons *concrets* lorsque nous exprimons, comme nous venons de le faire, la nature, l'espèce des grandeurs. Mais on conçoit que le nombre 25, par exemple, qui nous a servi à compter des grains de blé, pourra tout aussi bien nous servir s'il s'agit de n'importe quelle autre chose évaluable, et ce symbole 25 constituera un nombre *abstrait*.

La définition d'Auguste Comte. — Il nous faudra revenir sur ces notions un peu plus tard, en y insistant davantage; il nous a semblé utile de les indiquer ici d'un mot; mais, ce que nous voulons surtout en retenir, c'est ce fait que l'action de compter n'est qu'une forme particulière de la mesure. Le problème consiste toujours dans la comparaison d'une chose évaluable avec une chose analogue, supposée de nature identique par abstraction et que nous appelons *unité,* et dans la formation du nombre, comme sanction de cette comparaison.

Les choses évaluables sont les grandeurs, et c'est dans ce sens qu'on peut, en effet, assigner pour but à la Mathématique la mesure des grandeurs et l'étude des nombres, sans trop en dénaturer l'esprit. Mais Auguste Comte fait très juste-

ment remarquer que le nombre des cas où l'on peut directement évaluer une grandeur, comme dans les exemples que nous avons cités, est extrêmement rare; d'un autre côté, la Science mathématique, si elle se bornait à la recherche des mesures par des procédés mécaniques pour ainsi dire, serait loin de présenter le caractère qui lui appartient en réalité. Pour l'illustre fondateur de la Philosophie positive, c'est donc essentiellement « la mesure *indirecte* des grandeurs qui caractérise la Mathématique ».

Il est certain que cette idée fondamentale entraîne, comme conséquence, l'étude des propriétés des grandeurs, des liens qui les rattachent les unes aux autres, des méthodes par lesquelles nous pouvons arriver à des évaluations de mesures qu'un examen superficiel nous ferait proclamer impossibles, et qui seraient vraiment impossibles par voie directe.

Cependant, pas plus que les autres, cette définition n'est parfaite, ni complète. Elle ne comprend pas, en premier lieu, la notion d'*ordre,* qui est inhérente à l'esprit mathématique au même degré que la mesure. Et puis, à la prendre dans son sens absolu, elle laisserait de côté toutes les propriétés géométriques qui n'intéressent pas les questions de mesure. Nous ne pouvons nous appesantir ici sur ces considérations, qui trouveront naturellement leur place lorsque nous aurons, plus loin, à présenter un aperçu des diverses branches de la Mathématique. En les signalant, notre but est seulement de prémunir l'esprit du lecteur contre les formules générales, si séduisantes qu'elles nous apparaissent. Par cela même qu'elles sont trop générales, on y trouve une certaine confusion qui n'est pas sans danger.

Le but de la Mathématique. — A la place d'une définition reconnue réellement impossible, essayons donc, en partant des considérations déjà établies, de nous rendre compte, du moins d'une façon approchée, de l'objet que poursuit la Science mathématique et de l'intérêt qu'elle présente pour l'Humanité.

Compter et mesurer, avons-nous dit, sont des notions familières. Tout ce qui se compte et se mesure, tout ce qui s'évalue, appartient au domaine des grandeurs, qu'étudie la Science mathématique, et l'évaluation engendre des nombres,

symboles des mesures. Mais, nous ne saurions trop y insister, rien ne peut être soumis à l'application mathématique sans l'opération préalable de l'esprit que nous avons qualifiée d'*abstraction*, et qui consiste essentiellement à supprimer par la pensée, dans la chose étudiée, les caractères particuliers qu'elle présente et qui empêcheraient, si l'on en tenait compte, de la comparer avec d'autres choses analogues. Cette opération de l'abstraction, nous la retrouverons partout, sous mille apparences diverses, mais offrant toujours, en définitive, le même caractère fondamental.

L'abstraction peut être partielle ou totale; ou, pour parler plus exactement, on peut la pousser plus ou moins loin; mais, sans son secours, aucune étude mathématique n'est possible, aucun objet ne tombe dans le domaine des grandeurs, aucun des phénomènes de la nature ne peut être abordé. Cela provient de ce que le plus simple de ces phénomènes, de ce que le plus élémentaire de ces objets présente une complexité telle que l'esprit humain, s'en étant rendu compte, demeure impuissant et effrayé. Envisager toutes les conditions, essayer de pénétrer jusqu'à l'absolu est une pure chimère. Par l'abstraction, nous faisons disparaître ces complications; à la réalité des choses nous substituons des êtres de raison, créés par notre cerveau, sur lesquels les raisonnements et les procédés mathématiques pourront librement s'exercer.

Il suit de là que les applications mathématiques, en dépit d'une opinion erronée trop généralement répandue, ne peuvent jamais prétendre à l'absolue rigueur; elles consistent en approximations plus ou moins parfaites, suivant le degré d'avancement de la Science; mais, si l'on avance sans cesse vers la vérité, jamais on ne peut se flatter de l'avoir définitivement atteinte.

Le véritable esprit mathématique conduit donc, à l'encontre d'un préjugé maintenu par l'ignorance, à une méfiance perpétuelle de l'absolu. Très à l'aise, au milieu des plus profondes et difficiles recherches, tant qu'il raisonne sur les abstractions pures, le mathématicien sait à merveille que ces abstractions ne répondent pas et ne peuvent répondre aux faits; et c'est avec des précautions infinies qu'il entreprendra de transporter dans la réalité des choses les résultats de ses raisonnements ou de ses calculs.

En somme, le but essentiel vers lequel tend la Science humaine, c'est l'étude des phénomènes que nous présente le monde extérieur. Il y a dans cette étude trois périodes bien distinctes, en nous plaçant, bien entendu, au point de vue purement mathématique. Tout d'abord, par une abstraction préalable convenablement graduée et souvent fort difficile, il faut préparer les grandeurs que l'on doit étudier de manière à les rendre accessibles aux méthodes mathématiques, en profitant des ressources que la Science nous offre ; cette première partie est ce que l'on appelle souvent la *mise en équation ;* elle réalise le *passage du concret à l'abstrait*, et substitue ainsi au phénomène trop complexe pour être approfondi un problème plus simple, parce qu'il ne porte que sur des abstractions, et qui représente une traduction approchée, mais approchée seulement, de la nature des faits.

Une fois ce travail préparatoire accompli, la *résolution des équations,* effectuée par le seul secours des méthodes et des procédés mathématiques, permettra d'opérer des transformations utiles, de faire ressortir avec clarté les moyens d'évaluation des quantités que l'on cherche, et dont les valeurs étaient parfois entourées primitivement d'une obscurité profonde. Cette deuxième période est d'ordre exclusivement abstrait, puisque l'on n'y considère que des abstractions. Les nombres, les formules, les symboles de toute espèce ne représentent ici plus rien, en dehors des êtres logiques créés par le cerveau de l'homme. C'est sans doute ce qui a fait reprocher souvent à la Mathématique de fausser l'esprit en le poussant dans la voie de l'absolu. Mais le grief est d'autant plus mal fondé qu'il s'applique à une seule opération, sur trois dont se compose l'étude mathématique complète. Il faut d'ailleurs bien remarquer que ce travail de déductions opérées sur des abstractions n'a, par lui-même, aucune vertu créatrice spéciale. Le Calcul transforme, mais il ne rend jamais que ce qui lui a été confié ; c'est un fait inhérent à sa nature, et il n'en est pas moins précieux pour cela, car il permet de mettre en évidence des relations et des propriétés qui, sans son aide, seraient restées enveloppées d'une sorte de mystère. Mais ce serait une erreur profonde que de vouloir lui attribuer des vertus qu'il ne peut posséder à aucun titre.

Il nous reste à expliquer rapidement le caractère de la

troisième période de l'étude mathématique d'un phénomène. Elle consiste dans le *retour de l'abstrait au concret.*

Il s'agit de transporter les résultats fournis par le calcul et les raisonnements abstraits dans le domaine objectif qui avait fourni les données de la question, de discerner quels sont ceux de ces résultats fournissant des solutions utiles, d'interpréter ces solutions, d'en *faire la discussion*, comme l'on dit dans le langage mathématique; et ce n'est pas toujours la partie la moins délicate ni la moins épineuse de la question. Ajoutons pour mémoire qu'il sera toujours prudent de recourir, pour un contrôle définitif, à la sanction de l'expérience; cette dernière opération n'appartient plus, à proprement parler, à la Science mathématique; elle relève au contraire de la Science spéciale à laquelle se rattache le phénomène étudié; mais il est indispensable, pour dissiper toute équivoque, d'expliquer pourquoi ce contrôle est nécessaire.

Nous avons vu que les éléments introduits dans le calcul ou dans le raisonnement mathématique sont des abstractions et non pas la représentation exacte des faits réels; elles doivent seulement s'en rapprocher. Les nécessités de cette abstraction préliminaire entraînent donc des erreurs inévitables, nous en sommes prévenus d'avance. Suivant la nature des questions, cette première opération peut souvent devenir fort incertaine; l'hypothèse y joue parfois un rôle capital, à défaut de données plus solides; or, si l'hypothèse est en elle-même une ressource précieuse pour nous aider dans nos investigations, elle offre par contre de gros périls, surtout si elle a été créée *a priori*, et si nous cédons à la tentation trop naturelle d'accorder les qualités de la réalité effective à ce qui n'est que le fruit de notre imagination. D'autre part, sans qu'il y ait même intervention d'hypothèse proprement dite, il peut fort bien arriver (et il arrive plus souvent qu'on ne le suppose) qu'on ait négligé, pour construire les abstractions premières, des éléments qui nous semblent sans importance, par suite d'une appréciation insuffisante des faits. La mise en équation étant faite dans ces conditions, et le calcul ayant été conduit d'une façon irréprochable, les résultats mathématiques obtenus seront les solutions d'une question différente de celle qui nous était présentée. Au lieu de l'approximation à laquelle nous étions en droit de pouvoir pré-

tendre, nous nous trouverons en présence d'un écart constituant une erreur grossière. C'est l'expérience seule qui pourra nous faire connaître, en général, s'il en est ainsi, ou bien, tout au contraire, si nous devons accorder créance à notre solution, et la considérer comme pleinement satisfaisante dans des limites d'erreurs assignées et connues.

Subdivisions de la Mathématique. — Nous avons, dès à présent, une idée générale du domaine sur lequel s'étend la Science mathématique, et nous comprenons qu'il y aura lieu, pour pénétrer plus profondément au cœur du sujet, de la diviser tout d'abord en deux grandes branches, l'une comprenant l'*abstrait,* l'autre le *concret,* et répondant à peu près à ce que l'on appelle la *Mathématique pure* et la *Mathématique appliquée.*

Même dans l'étude de la Mathématique pure, il sera nécessaire néanmoins d'emprunter quelque chose au monde extérieur, pour nous rendre un compte exact de la genèse des abstractions; mais cela ne saurait porter atteinte à la grande classification d'ensemble dont nous venons de parler.

Ceci posé, si nous cherchons, dans les objets que nous présente la nature, à reconnaître ceux qui sont évaluables, et par suite accessibles à la méthode mathématique, nous verrons d'abord les *collections* d'objets isolés, par abstraction supposés identiques, et qui donnent naissance à la notion des *nombres entiers.* Cette étude, par suite des nécessités concrètes qui s'imposent, nous conduit de proche en proche à une généralisation qui embrasse toutes les opérations sur les nombres et l'étude des propriétés qu'ils nous offrent. C'est le calcul numérique ou l'*Arithmétique,* dans son sens le plus étendu, c'est-à-dire comprenant l'*Arithmologie,* qui se présente à nous. Mais la généralisation ne se borne pas là : la recherche des lois suivant lesquelles s'opère le calcul a amené progressivement l'esprit de l'homme à créer des symboles pour représenter les opérations; et de l'association de ces symboles, de leur combinaison systématique suivant des règles logiques immuables, est sortie l'*Algèbre*, sorte de langue universelle des opérations sur les grandeurs.

De l'idée fondamentale de l'Algèbre résulte, comme nous le verrons bientôt, la notion de *fonction.* Puis, cette notion,

associée à la connaissance naturelle de la *continuité*, que nous révèle le monde extérieur, nous amène au *Calcul infinitésimal*, instrument merveilleux de recherche et d'investigation, dont nous sommes redevables au génie de Leibniz et de Newton, peut-être aussi de Fermat. Enfin, au cours du XIX^e^ siècle, et particulièrement dans ces dernières années, des travaux tellement considérables ont été accomplis dans l'étude des fonctions et de leurs propriétés, qu'il faut créer à la *Théorie des fonctions* une place à part, distincte du Calcul infinitésimal proprement dit.

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que des grandeurs évaluables et mesurables, et que nous supposons représentées par des nombres. Mais les corps que nous voyons ont des formes, ils occupent des positions dans l'espace. L'étude des positions et des formes dans l'espace nous ouvre l'horizon immense de la *Géométrie*. Cette étude prend un caractère particulier de précision et de généralité par l'application systématique du calcul, application qui constitue la *Géométrie analytique*. Nous voyons ainsi successivement apparaître les diverses branches de la Science mathématique, s'appliquant à un monde extérieur immuable et en repos (1). Or, l'observation nous montre que le mouvement est le caractère commun de tous les corps, que leurs positions et leurs formes sont variables avec le temps, grandeur indéfinissable, mais que nous savons mesurer. La *Mécanique* embrassera l'étude du mouvement accompli dans le temps et dans l'espace.

L'énumération qui précède est loin d'être complète : encore moins faudrait-il la croire absolue; en réalité, toutes les sciences se ramifient, s'entr'aident; il y aurait imprudence à méconnaître qu'aux limites de chacune d'elles il existe, non pas une ligne de démarcation nettement et rigoureusement tracée, mais au contraire une sorte de zone frontière sur laquelle plusieurs sciences diverses peuvent revendiquer des droits égaux. C'est ce que la suite de cette étude ne cessera de nous révéler à chaque instant, et cela nous dispense d'appuyer ici notre affirmation de faciles exemples.

On remarquera que notre énumération est restée muette

(1) Sous réserve, cependant, de la nécessité d'introduire la notion de mouvement dans la constitution même de la Science géométrique.

en ce qui concerne la Physique mathématique. C'est qu'en réalité, si le domaine d'application de la Mathématique s'est largement accru de ce côté, ces conquêtes, dont il y a lieu d'ailleurs, de se féliciter, ont été obtenues à l'aide d'abstractions et d'hypothèses nouvelles, qui ont permis de donner un caractère mathématique aux théories édifiées dans ce but; c'est donc un élargissement progressif du champ d'investigation sur lequel s'étend l'action de la Mécanique, et qui ne nous contraint pas à la nécessité d'une subdivision particulière. D'ailleurs, voulant ne pas excéder les limites d'une étude rapide, nous ne chercherons pas à revenir sur cet ordre d'idées, et nous laisserons la Physique mathématique en dehors des considérations que nous nous proposons de développer à grands traits. Il est seulement utile d'insister ici sur la nécessité particulière de contrôler par l'expérience, plus attentivement que jamais, les précieux résultats que fournit la Science mathématique, sous peine de commettre de graves erreurs; autrement, on risquerait de laisser à la charge de la Mathématique des méfaits dont réellement elle ne saurait être rendue responsable.

Essai d'une classification. — Reprenant la liste des grandes subdivisions ci-dessus énumérées, nous pouvons à présent présenter le plan général de notre étude, qui comprendra :

La *Mathématique pure,* se subdivisant ainsi :

Arithmétique et Arithmologie.
Algèbre.
Calcul infinitésimal. } *Science du calcul.*
Théorie des fonctions.

Géométrie.
Géométrie analytique. } *Science de l'étendue.*

Mécanique rationnelle. — Science du mouvement.

La *Mathématique appliquée,* comprenant :

Des *considérations générales préliminaires;*
L'*application du Calcul;*
L'*application de la Géométrie;*
L'*application de la Mécanique.*

Dans une troisième partie, nous envisagerons les questions relatives à l'enseignement des diverses branches de la Mathématique, en suivant à peu près le même ordre.

J'ai dit qu'une semblable classification, forcément artificielle, devait présenter des imperfections et des lacunes. On n'y voit pas apparaître, en effet, des chapitres importants, tels que l'Analyse combinatoire, le Calcul des probabilités, la Géométrie de situation, pour nous borner à un petit nombre d'exemples. C'est que, d'une part, une classification trop étendue perdrait en clarté ce qu'elle pourrait gagner en rigueur, sans pour cela devenir absolument rigoureuse; et que, d'un autre côté, il ne nous semble pas y avoir un grave inconvénient à nous conformer à des habitudes prises, en faisant rentrer les sujets dont nous parlons dans un domaine qui n'est peut-être pas le leur au point de vue strict de la nature des choses, mais qui s'en rapproche assez, en raison des procédés et des méthodes à mettre en œuvre.

Importance de la Science mathématique. — Si nous avons été assez heureux jusqu'ici pour exprimer clairement notre pensée, le lecteur doit entrevoir dès maintenant la haute importance de la Mathématique dans l'échelle des connaissances humaines. Sans son secours, aucune étude des faits où figurent des quantités n'est rationnelle ni complète; c'est le plus merveilleux instrument créé par le génie de l'homme pour aider à la découverte de la vérité. Pourvu qu'on en fasse un emploi judicieux, pourvu qu'on ne lui demande pas d'autres services que ceux dont elle est capable, la Mathématique vient apporter son concours à toutes les autres sciences. Ajoutons qu'en elle-même, et au point de vue du développement de l'esprit, l'étude mathématique est un admirable exercice de gymnastique logique; on y apprend à raisonner juste, à effectuer les rapprochements nécessaires entre les idées et les signes, à faire le départ entre l'absolu et le relatif, entre le concret et l'abstrait.

Peut-être est-il bon de produire une pareille affirmation, même au milieu du grand développement scientifique et industriel de notre époque. Les préjugés, en effet, ont une ténacité telle, qu'ils persistent longtemps encore après que les faits leur ont donné les plus cruels démentis; et c'est seu-

lement par une persistance égale, et incessante, dans l'affirmation de la vérité, qu'on finit par les déraciner. Cependant une affirmation isolée en faveur de la Science mathématique n'a guère de valeur, émanant d'un homme qui fait profession d'aimer cette science. C'est pourquoi je préfère invoquer des autorités comme celle de Leibniz, disant que la Mathématique est « l'honneur de l'esprit humain » ; de Pascal écrivant : « entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle ».

Mais Leibniz, mais Pascal, peut-on dire, sont à la fois de grands philosophes et des mathématiciens illustres. A ce dernier titre, leur témoignage peut être entaché de partialité. Rappelons donc aussi cette parole, attribuée à Napoléon Ier : « L'avancement, le perfectionnement des Mathématiques sont liés à la prospérité de l'État. »

Mentionnons cet aveu de Darwin : « J'ai profondément regretté de n'avoir pas suffisamment approfondi ce genre d'études (l'Algèbre), au moins de façon à comprendre les grands principes de mathématiques, car les hommes doués de cette compréhension semblent posséder un sens supplémentaire. »

Enfin, tout en faisant la part de ce qu'elle peut présenter peut-être de trop absolu dans sa concision, méditons la pensée que Kant a exprimée en ces termes : « Une science naturelle n'est une science qu'autant qu'elle est mathématique. »

CHAPITRE II.

L'ARITHMÉTIQUE ET L'ARITHMOLOGIE.

Caractère général de l'Arithmétique. — Il est assez difficile de délimiter d'une façon précise le domaine de l'Arithmétique, et surtout d'indiquer exactement quels sont les caractères essentiels qui la distinguent de l'Algèbre, dont nous aurons à nous occuper dans le Chapitre suivant. Auguste Comte, à notre avis, a donné la meilleure formule, en disant que l'Arithmétique a pour objet le *calcul des valeurs* et l'Algèbre le *calcul des fonctions*. C'est une forme de langage exigeant, pour être bien comprise, une certaine connaissance de la notion de fonction, et qui a par suite l'inconvénient de ne pouvoir être placée au frontispice de la Science. L'inconvénient est mince, du reste; car, s'il peut être agréable, pour la satisfaction complète de l'esprit, de posséder ainsi une définition globale et synthétique, nous cherchons en vain quelle en peut être l'utilité, soit au point de vue de l'enseignement, soit à celui d'une compréhension générale des choses, pour celui qui veut simplement acquérir une initiation préalable.

Tout en rendant pleine justice à la définition générale d'Auguste Comte, nous pouvons donc aussi nous rendre un compte exact de ce qu'est l'Arithmétique, en énonçant qu'elle consiste dans la science du calcul, ou bien qu'elle étudie les nombres et les opérations sur les nombres. Ajoutons qu'on est communément convenu d'appliquer ce terme d'Arithmétique à la partie la plus élémentaire de la science générale du calcul, et que c'est habituellement par là qu'on aborde l'étude de la Mathématique.

Ce seul fait suffirait à lui donner une importance capitale, car, selon que les notions premières qui se présentent au début d'une vaste étude sont claires ou confuses, bien ou mal présentées, il s'ensuit une réaction nécessaire sur toute

la série des connaissances à acquérir plus tard. Cependant, il y a plus encore, et l'importance de l'Arithmétique est à la fois d'ordre philosophique, d'ordre pédagogique et d'ordre pratique.

C'est qu'elle comprend, en effet, deux branches fort distinctes : d'une part, les procédés de calcul, indispensables à connaître, du moins dans les parties les plus élémentaires, pour les usages courants de la vie; et de l'autre, ce qu'on pourrait appeler l'*Arithmétique scientifique,* c'est-à-dire l'étude des propriétés et des relations que les nombres présentent.

Le nombre. — Nous avons eu déjà l'occasion d'employer ce mot, sans nous appesantir sur l'idée fondamentale qu'il représente. Le moment est venu de serrer la question d'un peu plus près.

Bien des définitions du nombre ont été proposées. L'une d'entre elles, la plus précise à mon avis, et que j'ai eu l'occasion de présenter ailleurs, ne m'appartient pas en propre; elle m'a été suggérée par M. Hermann Laurent, auquel en revient tout le mérite. La voici :

« On appelle *nombre* une *locution* et un *signe* qui servent à désigner avec précision une quantité, et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont différentes. »

Cette manière de s'exprimer ne peut laisser aucun doute, alors que les faits du monde extérieur, c'est-à-dire l'observation et l'expérience, nous ont donné la notion précise de la quantité; l'égalité entre deux quantités nous est révélée aussi par la nature même des choses, accompagnée de l'idée instinctive d'abstraction, que nous avons indiquée plus haut.

Une fois le nombre créé pour une catégorie particulière d'objets, on comprend qu'il pourra servir tout aussi bien pour toute autre catégorie. Par exemple, nous avons compté des grains de blé, et nous en avons trouvé 25; la *locution* vingt-cinq, le *signe* 25 nous serviront indifféremment à compter des arbres, des mètres, des litres, des grammes, etc.

Ce signe 25 pris en lui-même est le nombre abstrait qui pourra s'appliquer à des quantités de toute nature; à proprement parler, il n'y a pas de nombres abstraits égaux entre

eux; il y a le nombre 25, par exemple, qui diffère de tous les autres. Écrire $25 = 25$ est un truisme n'apportant à notre esprit aucune connaissance nouvelle, et qui équivaut à peu près à des phrases telles que : « Je suis moi; une maison est une maison. »

Il n'en résulte pas néanmoins que de telles évidences soient toujours inutiles, et nous aurions tort d'en proscrire l'emploi.

Rapport. — Il est permis de se demander si l'idée de rapport, généralement reléguée assez loin dans l'étude de l'Arithmétique, ne mériterait pas de prendre place dès le début, comme conséquence de la notion de nombre. Si, par exemple, voulant mesurer une longueur, je l'ai comparée à un mètre et j'ai trouvé qu'elle contient 24 fois un mètre, le nombre abstrait 24 représente le résultat de la comparaison entre la longueur dont il s'agit et celle d'un mètre. Il est bien clair que si l'unité choisie avait été une longueur de 2^m j'aurais trouvé 12, et non plus 24, comme nombre représentant la longueur; si l'unité avait été 6^m, j'aurais trouvé 4, et ainsi de suite; on ne commet donc aucune pétition de principe en affirmant que le nombre abstrait qui détermine une quantité concrète représente le *rapport* entre cette quantité et la quantité de même espèce qui a été choisie comme unité, ce choix restant d'ailleurs à notre disposition; et, en procédant ainsi, on introduit franchement dans la science des grandeurs une notion qui est adéquate à celle de mesure, qui correspond à celle du nombre et qui n'est pas au fond plus compliquée. Cette idée fondamentale ainsi placée dès le début a le mérite d'établir nettement cette vérité, que nous ne pouvons arriver à avoir connaissance des grandeurs que par voie relative; elle présente en outre l'avantage de simplifier et d'éclaircir la définition des opérations, ou du moins de la multiplication, comme nous allons le voir dans un instant.

Numération. — Le nombre, sous sa forme la plus élémentaire, nous est révélé par l'évaluation des collections d'objets de même nature (ou supposés de même nature par abstraction) : c'est le *nombre entier*. La première question qui se présente à nous en Arithmétique est donc l'établissement du système des *locutions* et des *signes* permettant de représenter

et d'exprimer les nombres entiers. C'est l'objet de la *numération,* qui se subdivise ainsi en *numération parlée* et *numération écrite.* Il y a une infinité de numérations; celle qui est à peu près universellement adoptée, que tout le monde connaît et par laquelle il convient de débuter dans une première étude, est la *numération décimale,* sur les principes de laquelle il est inutile d'insister ici.

Opérations élémentaires. — Nous voilà en possession de la notion du nombre et des moyens de représenter les nombres entiers. Il s'agit maintenant de tirer parti de ces éléments pour combiner les nombres les uns avec les autres, pour effectuer ce que l'on appelle les *opérations arithmétiques.*

Ces opérations, comme on sait, du moins les opérations élémentaires, dont toutes les autres découlent, sont au nombre de quatre.

L'*addition* des nombres entiers est encore une de ces idées fournies par l'observation du monde extérieur, et qui sont plus simples en elles-mêmes que toutes les définitions qu'on tenterait d'en donner. Ajouter, réunir, mettre ensemble des collections d'objets, cela représente à notre esprit quelque chose de très compréhensible; et il en résulte aussi cette propriété essentielle de l'addition que l'ordre dans lequel ont été ajoutés les nombres que l'on veut ajouter n'influe en aucune manière sur le résultat, c'est-à-dire sur la *somme.*

La *soustraction* se définit immédiatement comme opération inverse de l'addition. Si, en ajoutant A et B, j'ai trouvé C pour somme, je dis qu'en soustrayant B de C, je trouverai A pour différence. Il s'ensuit immédiatement qu'en soustrayant A de C, je trouverais B pour différence.

La *multiplication* des nombres entiers, sous la forme la plus simple, se définit par l'addition. Multiplier un nombre (multiplicande) par 7 (multiplicateur), c'est former une somme de 7 nombres tous égaux au multiplicande. Il importe de remarquer dès l'abord que le multiplicateur est forcément un nombre abstrait. Si la notion de rapport a été introduite, comme nous l'avons proposé un peu plus haut, il en résulte aussi que la multiplication peut être définie de cette autre manière : formation d'un nombre (produit) qui ait avec le multiplicande le même rapport que celui du multiplicateur

avec l'unité. En d'autres termes, le nombre qui mesurerait le produit, si le multiplicande était pris pour unité, n'est autre que le multiplicateur. On arrive ainsi d'un coup à une définition tout à fait générale, et entièrement satisfaisante au point de vue philosophique.

Il suit de là que le produit sera un nombre concret ou abstrait, suivant que le multiplicande sera lui-même concret ou abstrait.

On démontre que l'ordre des facteurs, dans la multiplication des nombres entiers, est sans influence sur le produit. Le produit de A par B, ou de B par A, étant C, on définira la *division* en disant que A est le résultat ou *quotient* obtenu lorsqu'on divise C par B, ou B le résultat lorsqu'on divise C par A.

L'Arithmétique nous enseigne les moyens d'effectuer les opérations dont nous venons de parler. En même temps, elle envisage les propriétés que présentent ces opérations, étend quelques-unes d'entre elles, comme la multiplication, qui s'applique à des produits d'autant de nombres (ou *facteurs*) qu'on voudra. En outre, elle établit que la division n'est pas toujours possible, et montre comment elle peut le devenir au prix d'une modification légère dans la définition.

Divisibilité. — L'examen des conditions de possibilité de la division engendre la théorie de la divisibilité, l'un des chapitres intéressants de l'Arithmétique, mais que celle-ci ne peut étudier que dans ses parties les plus élémentaires. C'est de là, en effet, que la théorie des nombres premiers tire son origine, et cette théorie est à la fois l'une des branches les plus difficiles et les moins complètement connues de la Mathématique.

Quand le produit de A par B est égal à C, il s'ensuit que la division de C par A, ou par B, peut se faire exactement. On dit alors que C admet A et B comme diviseurs, ou que C est divisible, soit par A, soit par B. Tout nombre C est forcément divisible par lui-même, ce qui donne 1 comme quotient, et aussi par l'unité, ce qui donne C pour quotient. Si un nombre n'admet pas d'autres diviseurs que ceux-là, comme 7 par exemple, c'est un nombre *premier*. Dans le cas contraire, il est *composé*. L'étude de la répartition des nombres premiers, à mesure que l'on s'avance dans l'échelle indéfinie

des nombres entiers, est d'une difficulté effroyable, et c'est à peine si elle a été abordée. L'Arithmétique élémentaire peut donc à peine l'effleurer. Mais elle établit aisément que tout nombre composé est un produit de facteurs premiers ; elle montre comment on forme ce produit, qui ne peut être obtenu pour chaque nombre que par les mêmes facteurs; enfin, elle fournit des règles sûres pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, les diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres différents, et en particulier le plus grand de ces diviseurs communs, qui joue un rôle important dans cette partie de la science du calcul.

On rencontre, en s'engageant dans cette voie, un certain nombre de propositions dont l'utilité est manifeste au point de vue de la pratique des opérations, et dont l'intérêt théorique est peut-être encore plus grand.

Les fractions. — Jusqu'ici, nous n'avons opéré que sur des nombres entiers ; mais, suivant la nature des grandeurs concrètes soumises au calcul, il peut fort bien arriver que le calcul des mesures, limité à ce domaine, se trouve insuffisant. De cette nécessité nouvelle découle le calcul des fractions. Si l'unité concrète, par sa nature, est subdivisible en parties égales, chacune de ces parties, prise isolément, pourra être considérée comme une unité nouvelle. Une notation spéciale, et bien connue, permet de représenter une fraction; $\frac{2}{3}$, par exemple, représente deux fois une quantité obtenue en divisant l'unité en trois parties égales; $\frac{2}{3}$ d'une pomme, $\frac{2}{3}$ d'un mètre ont une signification nette et précise; mais $\frac{2}{3}$ d'un homme exprimerait une absurdité ; on voit que la nature concrète de l'unité joue ici un rôle important, ce qui n'empêche en rien, du reste, de considérer en soi le nombre abstrait $\frac{2}{3}$. Seulement, lorsque, dans une question arithmétique, il s'agira d'effectuer le retour de l'abstrait au concret, cela nous obligera à une précaution spéciale.

L'Arithmétique, abordant l'étude des fractions, étend à ces nombres toutes les opérations élémentaires, et c'est tout un

champ nouveau sur lequel la science du calcul vient de la sorte exercer son action.

Dans ces dernières années, il y a eu certaines tentatives faites en faveur d'une théorie nouvelle des fractions que nous voulons seulement indiquer en quelques mots, et qui nous paraît donner prise, au point de vue philosophique, aux critiques les plus justifiées. Dans cette doctrine, on prétend se passer de la divisibilité de l'unité ; $\frac{2}{3}$ est, par définition, un symbole se composant des deux nombres entiers 2 et 3 séparés par un trait. Sur ces symboles, au moyen de conventions préalablement faites, on établit des propositions, puis des règles de calcul, qui sont d'ailleurs en complète concordance, bien entendu, avec les procédés de l'Arithmétique ordinaire.

Quel que soit le talent des propagateurs de semblables théories, il est nécessaire de réagir énergiquement contre l'état d'esprit qu'elles nous révèlent. En continuant dans une pareille voie, on marcherait dans un sens radicalement contraire à celui du progrès. Cette préoccupation du symbolisme à outrance, qui se retrouve dans certaines manifestations littéraires ou philosophiques, et non pas seulement dans le domaine mathématique, répond en réalité à une sorte de sentiment de mépris pour les vérités que nous apporte la connaissance raisonnée du monde extérieur. Par une aberration pour ainsi dire incompréhensible, on en arrive à se figurer la Science mathématique comme d'autant plus parfaite qu'elle emprunte moins à la connaissance extérieure des faits. On la regarderait volontiers comme idéale, si elle se passait totalement de cette connaissance, et se bornait à raisonner sur des abstractions. On oublie que l'abstraction elle-même suppose la notion préalable des choses, on obscurcit les propositions simples, on rend difficile ce qui est aisé, on jette le scepticisme dans les esprits en accumulant ainsi comme à plaisir les obstacles artificiels, on contredit enfin la nature elle-même.

Ceci n'est pas une discussion; la place nous manquerait pour nous y livrer avec les développements nécessaires. Nous avons simplement voulu établir, à l'occasion de cette question des fractions arithmétiques, une protestation contre

des théories dites modernes, et beaucoup moins modernes qu'elles n'en ont l'air, car l'esprit sophiste qui les inspire est aussi vieux que le monde ; et leur triomphe, si malheureusement il se produisait, serait marqué par une période inévitable de décadence.

L'infini en Arithmétique. — La notion mathématique de l'infini s'est indirectement présentée à nous dès les débuts de l'Arithmétique. En formant successivement les nombres entiers, il tombe sous le sens que la suite qu'ils forment ne s'arrête jamais, puisque, à chacun d'eux, si grand qu'il soit, on peut ajouter une unité, pour former un autre nombre plus grand encore. Cette notion revient aussi à propos des nombres premiers, puisqu'on démontre, très aisément d'ailleurs, que la suite qu'ils forment est illimitée.

Mais c'est surtout dans l'étude des fractions que l'idée de l'infini se présente sous une forme qui nous oblige à l'introduire dans le calcul lui-même. Je veux parler de la conversion des fractions ordinaires en décimales, laquelle donne naissance aux fractions décimales périodiques, qu'en réalité nous ne pouvons écrire, puisqu'elles se composent d'un nombre illimité de chiffres décimaux, mais que nous indiquons cependant d'une manière précise, parce que les chiffres finissent par se succéder d'une façon régulière, les mêmes chiffres revenant dans le même ordre. Dans une étude un peu complète de l'Arithmétique, cette théorie des fractions périodiques mérite de tenir une place considérable, en raison des vues qu'elle permet de prendre sur une foule de questions qui s'y rattachent.

Ce sont aussi les fractions qui nous amènent pour la première fois à l'idée de l'infiniment petit. Si l'on considère la fraction $\frac{1}{A}$, et si A est un nombre entier très grand, la fraction elle-même sera très petite, d'autant plus petite que A sera plus grand. Si A, par la pensée, représente un nombre qui prend successivement les valeurs de tous les nombres entiers successifs, nous établissons que la fraction $\frac{1}{A}$ diminuera sans cesse, et qu'elle finira par prendre une valeur aussi petite que nous le voudrons, pourvu que nous donnions à A une

valeur entière suffisamment grande. C'est ce qu'on exprime mathématiquement en disant que $\frac{1}{A}$ est une quantité variable qui a pour *limite* zéro, ou encore que $\frac{1}{A}$ est un *infiniment petit*.

Ces idées s'introduisent fatalement en Arithmétique ; peut-être serait-il sage d'introduire en même temps les locutions et les notations nécessaires pour exprimer les idées, au lieu de renvoyer ces notions simples à beaucoup plus tard.

Les incommensurables. — Encore un sujet sur lequel ont été versés des flots d'encre, qui a donné lieu à d'interminables discussions, et qui est, par nature, absolument inextricable ou d'une extrême simplicité philosophique, suivant l'ordre d'idées qu'on adopte.

Persévérant dans la doctrine que nous suivons systématiquement, nous n'avons qu'à considérer les grandeurs concrètes naturelles, pour nous convaincre que certaines d'entre elles présentent un caractère de continuité. Nous ne pouvons pas imaginer, par exemple, qu'une longueur d'un mètre soit parcourue par un point d'un bout à l'autre, sans que le nombre qui mesurera la longueur entre l'origine et le point en question passe par *toutes* les valeurs comprises entre zéro et un. Or, parmi ces valeurs, en nombre infini, il en est que nous ne pouvons exprimer par une fraction (ni, bien entendu, à plus forte raison, par un nombre entier). Ce sont là les nombres incommensurables, dont nous avons l'idée concrète très nette, et que cependant nous ne pouvons représenter par les symboles abstraits créés jusqu'ici. Nous définirons cependant, d'une manière très précise, un nombre incommensurable A par une suite de fractions $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en nombre indéfini, et qui croissent sans cesse, et par une seconde suite de fractions $b_1, b_2, \ldots, b_n$, qui décroissent sans cesse, s'il est bien établi : 1° que A est toujours supérieur à toute fraction a ; 2° qu'il est toujours inférieur à toute fraction b ; 3° qu'en prenant n suffisamment grand, la différence entre b_n et a_n peut devenir aussi petite qu'on le voudra, c'est-à-dire inférieure à tout nombre assigné. Le sym-

bole A prendra alors une signification précise : ce sera la limite, soit des fractions a, soit des fractions b. Nous aurons ainsi précisé par un signe et par une locution le nombre qui peut servir de mesure à la quantité concrète répondant à A.

En Arithmétique, c'est par le calcul des racines que s'introduisent pour la première fois les incommensurables. Un produit de plusieurs facteurs égaux entre eux est ce qu'on appelle une *puissance*. Par exemple $aaaaa$, qui s'écrit avantageusement a^5, est la *cinquième puissance* de a. Si nous appelons N cette cinquième puissance, et que, voulant faire l'opération inverse, nous cherchions, connaissant N, à trouver a, nous dirons que a est la *racine cinquième* de N. Si nous donnions $N = 32$, il serait aisé de reconnaître que $a = 2$. L'Arithmétique, pour les racines $2^{\text{ièmes}}$ et $3^{\text{ièmes}}$ tout au moins, qu'on appelle racines *carrées* et *cubiques*, fournit les moyens de faire cette opération. Mais il s'en faut qu'elle soit toujours possible. Ainsi, que l'on se propose d'extraire la racine carrée de 2 : nous saurons trouver des fractions qui, élevées au carré, donneront toujours des résultats de plus en plus grands, mais constamment inférieurs à 2 : nous aurons aussi d'autres fractions, dont les carrés seront de plus en plus petits, mais toujours supérieurs à 2 ; enfin, l'une des premières fractions différera aussi peu que nous le voudrons de la fraction correspondante de la deuxième suite, pourvu qu'on la prenne assez éloignée. Dès lors, nous ne pouvons écrire le nombre qui représente la racine carrée de 2, ni sous forme entière, ni sous forme fractionnaire ; mais ce nombre est parfaitement défini, à l'exclusion de tout autre, et il l'est tellement que la Géométrie nous permet de construire très simplement une longueur mesurée par ce nombre ; le signe $\sqrt{2}$ sera donc l'expression très nette du nombre que nous avons voulu représenter.

En essayant de trouver des difficultés qui n'existent pas (alors que tant de difficultés sérieuses seraient plus dignes des efforts de l'esprit humain) et en voulant toujours se placer dans le domaine de l'abstraction et de l'absolu, certains savants en sont arrivés à se demander *si le nombre* $\sqrt{2}$ *existe!*

Autant se demander si 2 existe ; je sais bien ce que c'est

que 2 arbres, 2 ânes ou 2 kilomètres; mais 2 tout seul, comme nombre abstrait, n'existe qu'à l'état de création du cerveau et de signe représentatif. De même $\sqrt{2}$ a une existence pareille; c'est un signe visible, qui représente une notion nettement définie; c'est la traduction précise d'une quantité concrète, si je l'applique au mètre pour unité, puisque je sais construire la longueur $\sqrt{2}$. La seule différence, c'est que je ne pourrai appliquer le symbole d'un nombre incommensurable qu'à des grandeurs continues par essence, aussi bien que je ne peux appliquer le symbole d'une fraction qu'à des quantités divisibles.

Sur ces bases, conformes à la raison, au bon sens et à l'observation des faits, le calcul des nombres incommensurables peut s'établir en toute rigueur en Arithmétique.

On peut utilement y rattacher le chapitre des approximations et des erreurs, du moins dans les parties les plus élémentaires. C'est d'autant plus utile que, dans l'application, un judicieux emploi de la Mathématique exige une intervention à peu près constante de cette théorie.

Proportions. — Nous avons dit les avantages que présenterait l'introduction de la notion de rapport dès le début de l'Arithmétique. L'étude des égalités entre les rapports fait l'objet de la théorie des proportions, qui conduit à la solution d'un grand nombre de questions pratiques, par l'application des procédés appelés, assez improprement du reste, *règles de trois*.

Cette partie de l'Arithmétique, en dehors des applications utiles, présente un grand intérêt, en ce qu'elle permet, sous une forme exceptionnellement simple, et au moyen d'exemples tangibles empruntés aux faits, d'ouvrir pour la première fois l'esprit à la conception des quantités variables et à l'idée de fonction, sur laquelle nous reviendrons plus tard. Sans empiéter sur un domaine qui n'est pas le sien, et en poursuivant seulement le problème des évaluations, l'Arithmétique embrasse donc avec raison l'étude des grandeurs proportionnelles et fournit de précieux procédés de calcul à ce sujet.

Système des mesures. — En France surtout, l'Arithmétique, réduite même à sa partie la plus élémentaire, consacre

un important chapitre à l'exposé du système des mesures ou du *système métrique*. Il n'y a ici ni théorie ni règles de calcul spéciales à proprement parler. Mais les explications nécessaires pour faire clairement comprendre l'ensemble de ces unités, devant s'appliquer à toutes les grandeurs usuelles, n'en sont pas moins d'une haute utilité. Elles se rattachent d'ailleurs sur bien des points à des notions géométriques ou mécaniques, qui, pour être présentées d'une façon rapide et sommaire, sont cependant nécessaires en vue d'une étude ultérieure plus complète. Il faudrait donc se garder de voir dans l'étude du système métrique une simple nomenclature sèche, dans laquelle on ne ferait appel qu'à la mémoire. Ce serait en méconnaître l'esprit et la portée.

Calculs arithmétiques d'ordre supérieur. — Nous venons d'énumérer à peu près tout ce qui constitue la partie élémentaire de l'Arithmétique. Rationnellement, on doit aussi faire rentrer dans son domaine, d'après la donnée générale d'Auguste Comte, des opérations qui prennent ordinairement place dans d'autres branches de la Science. C'est ainsi que le calcul numérique des séries, la théorie des logarithmes, et même la résolution numérique des équations, pour ne citer que peu d'exemples, relèvent de l'Arithmétique à proprement parler. Seulement, il faut remarquer d'abord que les calculs de cette nature, même les plus compliqués, dérivent au fond de simples combinaisons des opérations élémentaires. D'un autre côté, l'Arithmétique, dans les questions dont il s'agit, ne peut guère intervenir utilement qu'après une préparation préalable, une étude des relations et des propriétés, qui est faite par les soins de l'Algèbre. Aussi n'y a-t-il pas un sérieux inconvénient, même au point de vue de la pure doctrine, à borner le domaine de l'Arithmétique proprement dite aux limites indiquées, et qui suffisent déjà à lui assurer une place bien importante dans l'ensemble de la Mathématique.

Arithmologie. — A l'Arithmétique, comme nous l'avons indiqué déjà d'un mot, doit être rattachée l'étude des propriétés qui appartiennent aux nombres, et qu'on a caractérisée dans les temps modernes du nom d'*Arithmologie*.

Cette partie de la Science, si peu avancée, exerce une attraction extrême sur ceux qui s'y adonnent; elle a été cultivée par les plus illustres mathématiciens; c'est à elle que Gauss doit une bonne partie de sa gloire, et Fermat y a consacré les plus grands efforts. L'intérêt de l'Arithmologie, ou *Théorie des nombres,* l'attrait particulier qu'elle inspire, tiennent en grande partie au caractère mystérieux, en quelque sorte, des propositions qu'elle comporte, et à la disproportion singulière entre la simplicité des énoncés et la difficulté ou même l'impossibilité d'établir les démonstrations.

Nous avons indiqué plus haut le problème de la répartition des nombres premiers. Voici quelques autres exemples de questions arithmologiques restées jusqu'ici insolubles, malgré d'innombrables efforts.

« La somme des puissances semblables de deux nombres entiers ne peut pas donner une puissance exacte de même degré, à moins que les puissances ne soient simplement des carrés. » (Théorème de Fermat.)

Autrement dit, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible avec des valeurs entières de x, y, z, si n est différent de 2.

« Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. » (Théorème de Goldbach.)

« Peut-on trouver deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, qui soient des puissances exactes de nombres entiers? » (Théorème de Catalan.)

L'extrême difficulté de ces questions et de beaucoup d'autres, en Arithmologie, tient à l'absence de méthodes. Il ne faudrait pas croire cependant que tant d'efforts des plus grandes gloires mathématiques soient restés totalement infructueux. On a pu, tout d'abord, étendre certaines théories de l'Arithmétique élémentaire, résoudre un grand nombre de questions particulières, rattacher quelques propositions arithmétiques aux plus hautes spéculations du Calcul infinitésimal, faire progresser jusqu'à un certain point la théorie des équations indéterminées, apporter à l'Algèbre un secours inattendu et parfois en faire autant pour la Géométrie, comme il est arrivé pour la résolution des équations binomes et pour l'inscription, dans le cercle, des polygones réguliers.

La considération de certaines *suites arithmétiques,* parmi lesquelles les *progressions*, soit par différence, soit par

quotient, a souvent aussi fourni de précieux résultats. En dehors des progressions, nous donnerons ici comme unique exemple la série qu'on appelle souvent série de Lamé, et qui appartient en réalité à *Fibonacci* (Léonard de Pise) :

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...,

Elle se forme en ajoutant toujours deux termes consécutifs pour obtenir le suivant, et elle jouit de propriétés nombreuses, qui sont utilisables dans une foule de questions.

La formation des *puissances d'un binome*, le *triangle arithmétique* de Pascal, le *carré arithmétique* de Fermat, doivent prendre place également dans l'Arithmologie, et pourront même être introduits avec avantage dans les éléments de l'Arithmétique, bien qu'on classe en général dans l'Algèbre toutes ces questions.

Un très grand nombre de questions concernant l'*analyse combinatoire*, c'est-à-dire l'étude des groupements des choses, en tenant compte de l'ordre et de la nature, appartiennent encore au domaine de l'Arithmologie. Il en est de même de ce qui concerne les *nombres polygonaux* et les *nombres figurés*, dérivant des séries arithmétiques. C'est également à l'Arithmologie que se rattachent, au moins par certains côtés, les problèmes de *géométrie de situation*, si attachants et souvent si difficiles, parmi lesquels nous pouvons citer en passant les *carrés magiques* et les figures magiques en général.

Nous avons dit que l'une des grandes difficultés de l'Arithmologie réside dans l'absence des méthodes qui s'offrent en général dans les autres branches de la Mathématique. Il importe donc d'autant plus de s'attacher au petit nombre de celles qui ont été créées par quelques esprits supérieurs, et nous ne saurions, dans cet ordre d'idées, passer sous silence la définition des congruences, qui est due à Gauss et qui offre de précieuses ressources. Lorsque deux nombres, a et b, divisés par un même nombre p, donnent le même reste, on dit qu'ils sont *congrus par rapport au module p*. Cette relation s'appelle une *congruence* et s'écrit :

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Par exemple, 23 et 9 sont congrus par rapport à 7 ; il en est de même de 23 et de 2 ; par rapport au même module 7

le nombre 21 est congru à 0, etc. Les opérations qu'on peut faire sur les congruences sont souvent d'un secours puissant en Arithmologie.

Nous ne voulons pas quitter ce sujet sans citer un savant qui a poussé très loin l'étude de l'Arithmétique supérieure, et qui fut malheureusement enlevé à la Science d'une façon prématurée, dans toute la force de son talent, et avant d'avoir produit tout ce qu'on était en droit d'en attendre. Dans le premier (et unique) volume de sa *Théorie des nombres,* paru en 1891, l'année même de sa mort, Edouard Lucas, car c'est de lui que nous parlons, jette au cours de sa Préface quelques aperçus si justes et si intéressants sur la science des nombres, que nous n'hésitons pas à lui emprunter une courte citation, par laquelle nous terminerons ce chapitre.

« Comme toutes les sciences, l'Arithmétique résulte de l'observation; elle progresse par l'étude des phénomènes numériques donnés par des calculs antérieurs, ou fabriqués, pour ainsi dire, par l'expérimentation; mais elle n'exige aucun laboratoire et possède seule le privilège de convertir ses inductions en théorèmes déductifs. Comme en Chimie, par exemple, on prépare les nombres au moyen du calcul; par la divisibilité, on décompose ceux-ci en éléments simples, les facteurs premiers; par la théorie des résidus potentiels, on détermine leur aspect, et en quelque sorte leurs réactions mutuelles; enfin, par la juxtaposition des nombres triangulaires, carrés, polygones, cubiques, etc., la théorie des formes numériques rappelle l'étude des systèmes cristallins. C'est par l'observation du dernier chiffre dans les puissances successives des nombres entiers que Fermat, notre *Divus arithmeticus,* créa l'Arithmétique supérieure, en donnant l'énoncé d'un théorème fondamental; c'est par la méthode expérimentale, en recherchant la démonstration de cette proposition, que la théorie des racines primitives fut imaginée par Euler; c'est par l'emploi immédiat de ces racines primitives que Gauss obtint son célèbre théorème sur la division de la circonférence en parties égales; et celui-ci fut le point de départ des profondes recherches d'Abel et de Galois, de MM. Kummer, Hermite et Kronecker, dans l'Algèbre supérieure. »

CHAPITRE III.

L'ALGÈBRE.

Les fonctions. — D'après la conception très juste d'Auguste Comte, l'Algèbre a pour objet le calcul des fonctions, par opposition avec l'Arithmétique, qui se propose le calcul des valeurs. Il est donc nécessaire de présenter maintenant cette notion de *fonction,* si fondamentale dans toute la doctrine mathématique. Hâtons-nous de dire que cet aperçu rapide ne saurait suffire à caractériser entièrement l'Algèbre, et que nous devrons ensuite revenir quelque peu sur nos pas, pour essayer de délimiter un peu nettement, sinon d'une manière absolue, chose impossible, le domaine de l'Algèbre.

Cherchons en premier lieu, pour ne pas abandonner la méthode constamment suivie par nous, à nous rendre compte des faits que nous présente le monde extérieur. Deux circonstances générales frappent notre esprit : c'est que tout ce que nous voyons est l'objet de continuelles transformations, et, d'autre part, que ces changements sont liés les uns aux autres. L'idée de variabilité, l'idée de loi s'introduisent ainsi spontanément dans notre esprit, sous la forme suivante : les choses changent, et les changements ont pour causes immédiates d'autres changements. Ceci est vrai dans tous les ordres de faits : qu'il s'agisse du monde physique et matériel, des phénomènes moraux, de ce qui relève de l'imagination pure, les exemples se présentent en foule à la pensée.

Mais, pour l'objet que nous avons en vue, il importe de descendre immédiatement de cette extrême généralité, en nous contentant d'appliquer cette observation aux choses mesurables, c'est-à-dire aux grandeurs, qui seules relèvent de la Mathématique. Un exemple va nous permettre de préciser davantage. Parmi les grandeurs naturelles, la *variable* par excellence, dont nous avons la notion instinctive avant de

savoir même la mesurer, c'est le temps. Supposons que nous prenions une pierre, et que nous l'abandonnions à elle-même, au-dessus du sol ; elle va se mettre en mouvement, et, dans toute la période qui s'écoule jusqu'à ce qu'elle touche le sol, elle parcourt un chemin tel que sa position à chaque instant est nettement déterminée. Si nous imaginons, à cet instant, qu'on ait mesuré la longueur du chemin parcouru depuis que nous avons lâché la pierre, et aussi le temps qui s'est écoulé depuis cet abandon, nous avons le sentiment très net que cette longueur, variable, est liée au temps écoulé, également variable : l'une dépend de l'autre ; la longueur, dans ce exemple, sera d'autant plus grande que le temps écoulé sera plus grand, et l'on comprend que, connaissant le temps écoulé, il sera possible de trouver la longueur du chemin parcouru. C'est ce qu'on traduira, en langage mathématique, en disant que *la longueur du chemin parcouru est une* FONCTION *du temps employé à la parcourir*. Il en serait de même si nous considérions le chemin parcouru par un train de chemin de fer se rendant d'une ville à une autre ; mais la fonction, dans ce dernier cas, ne serait plus du tout la même que dans le premier.

Toutes les fois que les choses variables, comme dans ces exemples, sont des grandeurs mesurables, toutes les fois que l'on peut, en outre, exprimer d'une façon précise la relation qui doit exister entre les nombres qui correspondent à ces grandeurs, la fonction considérée est du domaine mathématique. En réalité, les fonctions mathématiques ne se présentent pas dans la nature, à cause de la complexité infinie des phénomènes. On comprend en effet qu'une variable puisse dépendre des variations de plusieurs autres variables, et non pas d'une seule ; en fait, il en est toujours ainsi, et le nombre des variables qui interviennent dans un fait physique quelconque dépasse même l'imagination ; cela ne diminue d'ailleurs en rien, comme nous le verrons, l'importance et l'utilité des fonctions mathématiques.

Reprenons notre exemple de la chute d'une pierre. Cette chute, que nous avons considérée d'une façon générale et un peu superficielle, ne s'opère pas aussi simplement que nous avons pu le croire tout d'abord : la pierre tombe dans l'air ; de là une résistance qui altère le mouvement ; si cet air est

lui-même agité, deuxième cause de perturbation ; en tous cas, la résistance dépendra aussi de la forme de la pierre, de sa constitution physique, peut-être de sa composition chimique. Et puis, cette pierre n'est pas un point : peut-être tournera-t-elle tout en tombant ; que voudra dire alors la longueur du chemin parcouru? Mais supposons qu'il s'agisse d'un objet assez petit pour que nous négligions tous ces détails, d'une petite boule de plomb par exemple, et que nous fassions tomber cette boule dans un endroit complètement dépourvu d'air, si difficile, si impossible même, que cela soit en réalité. Nous n'en avons pas encore fini. Nous remarquons en effet que les longueurs parcourues, pour un temps donné, dépendront de la hauteur à laquelle on se trouve placé. Suivant qu'on fera l'expérience au bord de la mer ou bien au sommet du mont Blanc, le résultat ne sera pas le même ; il ne sera pas le même non plus, si l'on se trouve près de l'équateur, ou bien dans une région voisine du pôle. Ainsi, la hauteur de chute est fonction, non pas seulement du temps de chute, mais aussi de l'altitude et de la latitude. Et encore n'avons-nous pas fait entrer en ligne de compte le mouvement de rotation de la terre, ni sa circulation autour du soleil, qui compliquent singulièrement le phénomène.

Nous voyons, par cet exemple, combien le fait naturel le plus ordinaire présente de complexité, si l'on veut l'analyser rigoureusement, et combien une grandeur variable dépend d'autres grandeurs variables en nombre considérable. Cependant, on obtient une approximation qui peut différer très peu de la vérité, en négligeant plus ou moins de ces causes accessoires, pourvu qu'on fasse avec discernement cette *abstraction*, analogue à l'opération du même nom que nous avons considérée au début du chapitre précédent. Cette abstraction opérée, dans l'exemple dont il s'agit, nous pourrons dire que le chemin parcouru par un corps pesant qui tombe dans le vide est une fonction du temps depuis lequel il tombe. L'expérience nous apprend qu'au bout de une, deux, trois secondes, et ainsi de suite, les longueurs parcourues seront entre elles comme les nombres 1, 4, 9, etc. C'est ce qu'on traduit par cette loi physique : *les espaces parcourus par un corps pesant qui tombe dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir ;* mathématiquement, on dira

que l'espace est mesuré par un nombre exprimé par kt^2 ; c'est un exemple d'une fonction mathématique, k étant un nombre constant, t le nombre qui exprime le temps de chute, t^2 le carré de ce nombre, et kt^2 le produit de k par t^2.

Si nous avons un peu insisté sur cet exemple très simple, c'est pour faire comprendre clairement comment la nature nous offre le spectacle de variables dépendantes ou fonctions, lesquelles dépendent elles-mêmes d'autres variables, dites indépendantes ; et comment il est possible, dans certains cas, d'exprimer cette dépendance par des opérations de calcul, pourvu que les variables soient du domaine des grandeurs mesurables, et pourvu qu'une abstraction préalable nous ait permis de remplacer le phénomène compliqué par un autre plus simple, dans lequel nous saurons indiquer quelles sont les opérations à faire sur les variables (ou sur la variable) pour obtenir la fonction.

Une fois qu'on en est là, le problème est, on le voit, d'un ordre tout différent de ce qu'il était d'abord et appartient exclusivement à la Mathématique. En représentant toutes les quantités (ou plutôt les nombres qui les mesurent) par des lettres, on pourra, au moyen de signes convenables, exprimer les opérations qu'il faut effectuer sur les nombres représentant les variables indépendantes pour obtenir celui qui représente la fonction.

Langage algébrique. — L'ensemble des signes en question constitue ce qu'on pourrait appeler l'*alphabet* de l'Algèbre. Celle-ci nous apprend à combiner ces signes, à les associer, à les transformer, et à obtenir, par les tableaux d'opérations à effectuer, ce qu'on appelle les *formules* algébriques. La science qui nous occupe prend ainsi le caractère d'une langue écrite, langue merveilleuse dans sa rigueur et sa concision ; elle évite les longues circonlocutions, n'emprunte ses règles qu'au raisonnement et à la pure logique, et, partant d'un point de départ extrêmement simple, permet de pousser jusqu'à des limites indéfinies les développements qu'on en peut déduire.

On croit fréquemment, faute d'une éducation mathématique suffisante, que la distinction entre l'Arithmétique et l'Algèbre tient à ce que la première emploie des chiffres et la

seconde des lettres pour représenter les nombres. C'est une erreur capitale : l'Arithmétique souvent se sert des lettres avec avantage ; l'Algèbre, et c'est ce qui la distingue, ne poursuit que l'indication des opérations à faire, en nous fournissant ses formules ; une fois les formules obtenues, qu'on emploie chiffres ou lettres, si l'on cherche à déterminer des valeurs, le problème appartient à l'Arithmétique.

Dans le développement de ce langage algébrique, on aura tout d'abord à faire usage des signes qui correspondent aux quatre opérations élémentaires de l'Arithmétique ; mais on serait vite arrêté s'il fallait s'en tenir là ; aussi la science algébrique s'est-elle enrichie de signes nouveaux, dont le nombre s'accroît chaque jour, et qui présentent l'avantage d'exprimer sous forme concise une succession d'opérations qui seraient sans cela d'une explication longue et difficile. Cette introduction des signes nouveaux est une question de mesure. Si l'on en introduit un trop grand nombre, on surcharge la mémoire et l'on tombe dans les inconvénients de l'alphabet chinois ; si l'on refusait systématiquement tout signe nouveau proposé, on se priverait des plus précieux avantages. Il en est un peu de cette question comme de l'introduction des mots dans une langue ordinaire ; il finit par se former une tradition et des usages qui ont force de lois.

Ce qu'il y a d'important à retenir ici, c'est ce caractère général de l'Algèbre, et les conséquences considérables qu'entraîne une pareille conception. Puisqu'en effet, au point de vue où nous nous plaçons, l'Algèbre traduit les faits mesurables qui nous sont fournis par l'observation des grandeurs concrètes, sur lesquelles a été opérée l'abstraction nécessaire, il s'ensuit que l'Algèbre variera suivant la nature de ces quantités concrètes, s'il arrive qu'elles présentent par leur essence même des propriétés mathématiques différentes. Il y a donc plutôt *des Algèbres* que *l'Algèbre*. C'est une notion utile à introduire dès maintenant, mais que nous allons bientôt retrouver, dans l'examen des opérations algébriques les plus élémentaires.

Classification des fonctions. — Les fonctions mathématiques sont en nombre illimité. Suivant qu'elles exigent, pour être exprimées, des signes qui se rapportent aux opéra-

tions arithmétiques ordinaires, ou bien des signes nouveaux, on les a classées en fonctions *algébriques* ou *transcendantes*, mots assez mal appropriés, mais qui ont cours, et que l'on ne peut songer à modifier.

Les fonctions algébriques elles-mêmes se subdivisent en fonctions *entières, rationnelles, irrationnelles*, dont tous les traités fournissent les définitions. Mais il est une notion bien supérieure à toute cette énumération, et à laquelle nous avons hâte d'arriver. Si y représente une quantité variable, et qui ne dépend que d'une seule autre variable, appelée x, on est convenu d'exprimer cette dépendance par un signe tel que $f(x)$ et d'écrire $y = f(x)$. Dans cette expression, f est un symbole qui exprime toutes les opérations à faire sur x pour obtenir y; et, si ces opérations sont nettement précisées, nous disons que y est une *fonction explicite* de x; ainsi, en revenant à notre exemple de la chute d'un corps pesant, nous avons vu qu'en appelant e l'espace, nous obtenions $e = kt^2$; ici, e est une fonction explicite de t. Si nous nous étions proposé de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de trouver le temps depuis lequel tombe un corps, sachant le chemin qu'il a parcouru, il eût fallu trouver t, connaissant e; l'opération mathématique qui nous permettra d'aboutir à ce résultat en partant de la relation $e = kt^2$ aura pour objet d'*expliciter* la variable t, considérée comme fonction de e; jusque-là, t est une fonction *implicite*.

Équations algébriques. — Lorsqu'on se propose de résoudre un problème quelconque appartenant au domaine mathématique, depuis le plus simple jusqu'au plus compliqué, il y a toujours lieu de considérer certaines grandeurs $a, b, c, \ldots$, que l'on connaît, appelées *données* ou *quantités connues:* et certaines autres, $x, y, z, \ldots$ que l'on cherche, et que l'on appelle les *inconnues*. Or, la nature même de la question nous amène inévitablement à un raisonnement de cette forme: si je fais, sur toutes les quantités que je considère, telles opérations, j'aurai le même résultat que si je faisais telles autres opérations.

D'après ce que nous avons dit, cela se traduira en algèbre par une relation d'égalité qui s'écrira ainsi:

$$\mathrm{F}(x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots) = \Phi(x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots),$$

ou plus simplement, en représentant par f la différence entre les fonctions F et Φ,

$$f(x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0.$$

Une telle relation d'égalité entre des inconnues et des données est ce qu'on appelle une *équation algébrique*. Si l'on peut obtenir un nombre suffisant de relations de ce genre, on sera théoriquement en possession des éléments suffisants pour la détermination des quantités inconnues. On voit qu'il faut bien se garder de confondre une équation avec une *identité*, telle que $2 + 3 = 5$, par exemple.

Ceci posé, on peut dire, sans porter aucune atteinte au caractère général de l'Algèbre, qu'elle a pour objet la *résolutions des équations*, c'est-à-dire, ce qui revient exactement au même, la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites.

Supposons, pour simplifier, que la question ne comporte qu'une seule donnée a et une seule inconnue x. On a une équation $f(x, a) = 0$; cette équation suffit à nous prouver que x est une fonction de a ; mais jusqu'à présent c'est une fonction implicite ; *résoudre* cette équation, c'est en conclure une formule telle que $x = \varphi(a)$, qui nous présentera le tableau exact des opérations à faire sur a pour obtenir x.

Ce problème, même réduit aux termes que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire à une seule équation et une seule inconnue, dépasse et dépassera probablement toujours les limites de l'intelligence humaine. C'est à peine s'il a pu être complètement résolu dans quelques cas très simples que nous allons indiquer. Et cependant, combien ces résultats prennent d'importance et représentent une somme considérable de vérités découvertes et de théories dignes d'intérêt ou même d'admiration !

Classification des équations. — Suivant que, dans une équation algébrique $f(x, y, z, \ldots) = 0$, où nous n'écrivons maintenant que les inconnues, la fonction f sera algébrique ou transcendante, on dira que l'équation est elle-même *algébrique* ou *transcendante*. Lorsque, dans une question, entreront plusieurs équations et plusieurs inconnues, l'ensemble de ces équations formera un *système d'équations*.

On établit qu'une équation algébrique isolée $f(x) = 0$, à une seule inconnue, peut toujours se mettre sous une forme telle que $f(x)$ soit un polynome en x, c'est-à-dire une expression de la forme $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$. On classe alors les équations algébriques suivant leurs *degrés,* c'est-à-dire suivant le nombre entier qui indique la plus haute puissance de l'inconnue entrant dans $f(x)$. Or, si l'Algèbre résout très facilement les équations des deux premiers degrés, si elle fournit des formules, un peu compliquées et d'une application pénible pour le 3e et le 4e degrés, elle vient s'arrêter impuissante devant les équations du 5e degré. C'est à ce point que la démonstration de l'impossibilité radicale de résoudre l'équation générale du 5e degré à l'aide des fonctions ordinaires de l'Algèbre a été considérée, à juste titre, comme une découverte importante.

Il est bon d'ajouter, comme compensation, que de nombreux procédés permettent de déterminer les valeurs numériques des racines d'une équation quelconque avec telle aproximation que l'on désire; mais c'est un problème qui, par sa nature, relève plutôt de l'Arithmétique que de l'Algèbre, ainsi que nous l'avons indiqué déjà.

Théories algébriques. — En dépit de l'impuissance relative de l'Algèbre au delà du 4e degré, et de la simplicité apparente du problème général dont elle poursuit la solution, les développements de la langue algébrique forment une suite indéfinie de chapitres, dont l'ensemble, dans l'état présent de la science, est un véritable monument qui atteste la puissance de l'esprit humain, et montre quel secours merveilleux apporte au raisonnement la constitution logique d'un système heureusement combiné de signes ou symboles. Chacun de ces chapitres constitue ce qu'on appelle fréquemment une *théorie algébrique.*

Nous n'énumérerons pas les principales théories algébriques; nous ne saurions le faire sans risquer d'être diffus sur certains points, incomplet sur d'autres. Une telle liste n'apprendrait rien d'ailleurs, et, pour la dresser, nous sortirions fatalement du cadre dans lequel nous nous renfermons ici. Cet incroyable développement des théories algébriques est relativement tout moderne, et date de l'époque où le génie

de Viète introduisit dans cette partie de la science une véritable révolution. C'est lui qui doit être en réalité considéré comme le créateur de l'Algèbre, telle que nous la concevons aujourd'hui. Avant Viète, on représentait bien les inconnues des questions par des lettres, pour faciliter l'écriture ; il eut l'idée d'appliquer cette représentation aux données elles-mêmes. De ce jour, à la recherche des valeurs se trouvait substituée la recherche des opérations à faire, l'idée de fonction mathématique était portée dans la science, et c'est là l'origine de tant de progrès.

Extension des idées et du langage algébriques. — On n'aurait qu'une idée incomplète de la puissance de l'Algèbre, si l'on croyait devoir en restreindre les applications aux seules grandeurs mesurables que l'on considère en Arithmétique. Longtemps on a cultivé cette erreur ; quelques-uns même la professent encore aujourd'hui ; c'est d'autant plus excusable, que de grands génies, comme celui de Newton, par exemple, n'y ont pas échappé. Le titre d'*Arithmétique universelle*, par lequel il a cru pouvoir caractériser l'Algèbre, et qui n'indique qu'imparfaitement l'objet de cette science, en est une preuve.

Cette conception incomplète a été d'autant plus funeste, qu'elle a contribué pour une bonne part à dénaturer l'esprit même de la science mathématique. On a remarqué, en effet, que le calcul algébrique, en combinant systématiquement les signes sur lesquels il opère, conduisait à des résultats nouveaux et fournissait des formules, alors même que les questions qui avaient servi de point de départ ne comportaient pas de solution. De là l'idée d'attribuer au calcul lui-même une puissance de généralisation particulière et quelque peu mystérieuse, en vertu de laquelle les transformations qu'on opère auraient une véritable valeur créatrice.

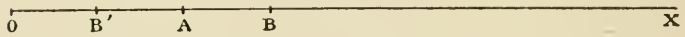
La première, et la plus simple, des manifestations de ce fait, se trouve dans la théorie des quantités négatives. Retrancher 5 de 3, en Arithmétique, est une pure impossibilité ; retrancher b de a, en Algèbre, sera toujours faisable, et le résultat s'écrira $a - b$: si l'on suppose que $a = 3$, $b = 5$, on s'imagine que l'Algèbre a créé un nombre nouveau, le nombre négatif -2 ; et l'on s'est évertué pendant des siècles

à essayer d'*interpréter* ces résultats inattendus, en s'émerveillant de les voir s'adapter aux questions, moyennant certaines modifications.

Ce dont on ne s'était pas aperçu, c'est qu'en instituant l'Algèbre avec ses signes et ses règles d'opérations, on avait institué par cela même un ensemble de symboles s'appliquant à autre chose que l'objet primitivement en vue.

Sans anticiper sur la Géométrie, dont nous parlerons plus loin, il saute aux yeux que si nous traçons (*fig.* 1) une droite

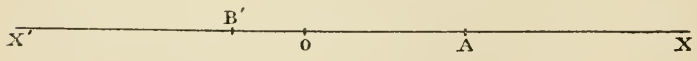
Fig. 1.



OX suffisamment prolongée, nous pourrons représenter tous les nombres de l'Arithmétique par des fragments de cette droite, des *segments*, comme l'on dit, tels que OA, AB, etc., dont la longueur soit mesurée, pour chacun, par le nombre correspondant.

Il devient alors évident que, pour ajouter deux nombres représentés par les segments OA, AB, il suffira de porter l'un d'eux, AB, au bout de l'autre OA, et qu'on aura la somme représentée par le nombre qui mesure OB. Si l'on veut au contraire retrancher AB de OA, il n'y aura qu'à porter AB′ de longueur égale à AB, au bout de OA, mais *en sens contraire*, et l'on aura en OB′ la différence. Cela va très bien si AB est plus court que OA ; mais s'il devient plus long, l'impossibilité se manifeste par ce fait que nous tombons en dehors de la droite OX, à gauche du point O. Prolongeons au contraire cette droite en OX′ (*fig.* 2), et nous

Fig. 2.



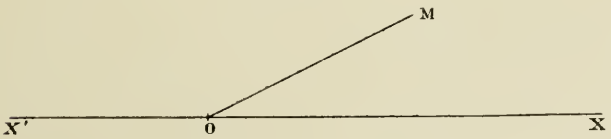
aurons un point B′ sur ce prolongement. La différence sera figurée par le segment OB′, dirigé à partir du point O, non plus de gauche à droite, mais de droite à gauche.

Sans plus insister, nous voyons que la *semi-droite* OX nous présente l'image du domaine de toutes les grandeurs arithmétiques, et que la droite indéfinie X′X nous offre celle de toutes les grandeurs de l'Algèbre, positives ou négatives.

Et ce n'est pas de l'Algèbre qu'elles sont sorties, ces quantités négatives : elles appartiennent à la nature même des choses, elles sont soumises aux mêmes règles d'opérations que les quantités arithmétiques ; et par suite, il n'est pas étonnant que l'Algèbre, traduisant les propriétés des unes, s'applique aux autres. Cette unique remarque dissipe toutes les obscurités qu'on s'est plu à déverser sur la théorie des quantités négatives, et démontre intuitivement ce théorème général : « Si une quantité concrète, par sa nature, peut avoir deux sens différents et opposés (comme une échelle thermométrique, un débit ou un crédit, un temps compté dans l'avenir ou dans le passé, etc.), cette quantité étant soumise au calcul algébrique, tout résultat algébrique positif ou négatif, obtenu comme solution, exprimera une valeur de la quantité dont il s'agit, en grandeur et en sens, l'expression algébrique ayant une grandeur et un signe. »

Cette simple indication est suffisante pour donner une idée première de la théorie des quantités négatives, qui trouvent ainsi leur représentation sur la semi-droite OX′. N'était-il pas naturel, dès lors, de chercher à sortir de ce domaine étroit, la ligne droite, où les quantités algébriques positives ou négatives sont en quelque sorte emprisonnées, et de se demander si, par des symboles convenables, on ne pourrait pas représenter les faits géométriques qui se passent sur un plan ? Il faudrait pour cela (*fig.* 3) représenter un segment

Fig. 3.



incliné OM, partant de l'origine O pour aboutir à un point quelconque, par une notation spéciale, puis étendre à ces segments les opérations élémentaires de l'Arithmétique et de l'Algèbre. En suivant cette voie, on arrive à édifier une méthode de calcul dont les règles sont exactement celles de l'Algèbre ; les nouvelles quantités représentant les segments inclinés sont, non pas analogues, mais identiques aux expressions dites *imaginaires*. Ce n'est pas précisément ainsi

que l'on a procédé en réalité. Les imaginaires, sorties de la résolution des équations du second degré, ont été prises pour un produit pur de l'Algèbre, et l'on a versé des flots d'encre pour en élucider la nature, même après les beaux travaux de Cauchy sur les quantités géométriques. C'est à peine si l'on commence timidement aujourd'hui à donner un coup d'œil en passant à l'admirable méthode des *équipollences*, aussi remarquable par sa fécondité que par sa conception fondamentale, et qui est due à l'un des plus profonds géomètres dont l'Italie ait pu s'honorer, Giusto Bellavitis. Cette méthode n'est autre qu'un calcul géométrique, identique à celui de l'Algèbre, et traduisant, comme nous venons de le dire, les faits géométriques du plan tout entier.

C'est à un illustre astronome et géomètre de la Grande-Bretagne, Hamilton, qu'est due l'idée de créer un calcul s'appliquant aux faits géométriques de l'espace, et non plus seulement à ceux du plan. De là sa méthode des *quaternions*, pratiquée avec tant d'avantages par les savants anglais depuis bien des années, et qui pénètre à peine et difficilement en France. Mais ici, en raison de la nature même des choses, les règles de calcul à appliquer ne sont plus exactement celles de l'Algèbre ordinaire. Elles subissent des modifications profondes, parmi lesquelles la plus importante consiste dans l'impossibilité d'intervertir les deux facteurs d'un produit, sans altérer ce produit lui-même.

Une méthode d'une extrême puissance, celle de Grassmann, forme en quelque sorte la synthèse, le lien commun entre celles dont nous venons de parler, et présente des ressources considérables, permettant de résoudre parfois très simplement des questions difficiles. Elle mériterait d'être plus généralement connue qu'elle ne l'est encore.

On voit la gradation : sur une semi-droite, domaine de l'Arithmétique, représentation des quantités positives ; sur la droite entière, domaine de l'Algèbre des quantités réelles, positives ou négatives ; sur le plan, domaine des équipollences, où se trouvent représentées les quantités dites imaginaires, et qui sont cependant tout aussi réelles que les autres ; dans l'espace, domaine des quaternions, avec leur Algèbre spéciale ; toutes ces méthodes venant se fondre dans celle de Grassmann.

Mais ce n'est pas seulement aux faits géométriques que le calcul peut s'appliquer. Dès que des éléments d'une nature quelconque, mais comparables et mesurables, peuvent être représentés par des symboles spéciaux ; dès que les relations entre ces éléments peuvent être exprimées par des signes particuliers d'opérations sur ces symboles, on a par cela même créé une Algèbre nouvelle. Cette conception nous porte bien au delà du domaine étroit de l'Algèbre ordinaire. Nous nous bornerons à en citer deux exemples, deux tentatives plutôt, qui auraient mérité peut-être d'attirer d'une façon plus particulière l'attention des savants : les essais d'application d'un symbolisme systématique aux faits de la logique, dont l'expression la plus caractéristique se trouve dans les *Lois de la pensée*, de Boole ; puis, le *Calcul des opérations chimiques*, de Brodie. Il faudrait peut-être rattacher encore à cette Algèbre générale l'application, si souvent essayée, de la méthode et de la langue mathématiques aux phénomènes sociologiques, économiques ou démographiques. Enfin, il serait injuste de n'y pas faire rentrer les travaux si intéressants entrepris depuis plusieurs années, en Italie, par M. G. Peano et quelques-uns de ses disciples, sous le titre de *Logique mathématique*. C'est la mise à exécution, sous une forme peut-être perfectible encore, d'une idée dont Leibniz semble avoir jeté le premier germe. Cela porte à penser que ce grand esprit comprenait l'Algèbre autrement qu'on ne l'a fait souvent depuis. Il ne lui attribuait pas une puissance de création et de généralisation qu'elle ne peut avoir, mais il voyait dans les principes mêmes dont elle découle la possibilité d'édifier une langue écrite, pouvant exprimer rigoureusement et simplement les faits et les relations qu'ils ont entre eux.

CHAPITRE IV.

LE CALCUL INFINITÉSIMAL.

Importance historique. — La découverte du Calcul infinitésimal est peut-être le fait le plus considérable qui se soit jamais produit dans l'histoire de la science mathématique. Ce fut une véritable révolution : à partir de ce moment, les applications se succédèrent avec une rapidité et une fécondité surprenantes ; les problèmes réputés les plus difficiles furent abordés, et parfois résolus, avec une merveilleuse facilité. L'instrument nouveau mis à la disposition de la science paraissait tenir du prodige, être une sorte de clef magique destinée à ouvrir toutes les portes et qui devait permettre de pénétrer tous les mystères de la nature.

A qui l'Humanité doit-elle reporter la gloire de cet immense progrès ? On sait quelle lutte passionnée fut la conséquence de cette question, entre les disciples de Newton et de Leibniz. Depuis lors, des travaux historiques relativement récents permettent de faire remonter jusqu'à notre grand Fermat l'honneur de la première conception du Calcul infinitésimal ; mais ces questions de prédominance ou de priorité, au profit de telle personnalité ou de telle nation, n'ont plus guère aujourd'hui qu'un intérêt de simple curiosité. Ce qu'il faut constater surtout, c'est que la découverte était à l'état d'incubation, comme il arrive souvent dans toute science ; les procédés des anciens, les ressources de l'Algèbre moderne créée par Viète ne suffisaient plus pour aborder quelques-uns des plus importants problèmes de la nature. Les moyens nouveaux dont le génie mathématique de quelques hommes vint enrichir la science étaient devenus en quelque sorte une nécessité. Il n'est pas à regretter que cette illumination se soit produite simultanément ou à peu près sur plusieurs points du monde et sous des apparences diverses. Il eût été

beaucoup plus difficile sans cela de dégager le véritable caractère philosophique du nouveau calcul, ce à quoi nous sommes à peine arrivés à l'heure présente.

Analyse transcendante. — Cette branche de la science mathématique a reçu des dénominations diverses, parmi lesquelles celle d'*Analyse transcendante,* opposée à *Analyse algébrique,* a longtemps prévalu. Aujourd'hui encore, le terme d'*Analyse* paraît être en faveur, puisque plusieurs des chaires les plus importantes de Calcul infinitésimal sont ainsi qualifiées. On remarquera que nous avons évité ce vocable en tête du présent Chapitre : sans attacher aux mots plus d'importance qu'il ne convient, il est permis cependant de regretter l'usage abusif de ceux qui peuvent entraîner à leur suite des idées fausses, et nous croyons que c'est ici le cas.

L'analyse et la synthèse sont deux grandes méthodes, opposées l'une à l'autre, et qui se retrouvent dans toutes les recherches scientifiques. Qu'il s'agisse de logique pure, de Chimie ou de faits mathématiques, on fait de l'analyse quand on décompose une question en éléments plus simples, pour arriver ainsi, par une sorte de réduction poussée aux dernières limites, jusqu'à la solution complète, obtenue par un procédé systématique et méthodique, qui conduit au résultat par une voie, pénible peut-être, mais sûre. On fait au contraire de la synthèse, quand on construit de toutes pièces la solution, avec les matériaux qu'on possède déjà, sauf à vérifier cette solution par la méthode analytique.

Or, dans le domaine mathématique, on a complètement détourné ces termes de leur signification générale, en assimilant analyse à *Calcul* et synthèse à *Géométrie.* Et, s'il est vrai qu'en soumettant les questions au calcul on suit le plus souvent une marche analytique, le contraire se présente aussi, et plus souvent qu'on ne l'imagine. On fait fréquemment du calcul synthétique, de même qu'on peut, en Géométrie pure, recourir à l'analyse sans faire le moindre calcul. Il importe donc de ne pas se laisser surprendre par l'emploi de mots en usage, mais détournés de leur signification normale.

Caractère général du Calcul infinitésimal. — Auguste Comte, grand admirateur de Lagrange, — et une telle admiration est certes justifiée, — a cru pouvoir établir une distinction nette entre l'Algèbre ordinaire et le Calcul infinitésimal, en assignant à la première l'étude des fonctions directes, et à celui-ci l'étude des fonctions indirectes. Pour pénétrer complètement le sens d'une telle distinction, il faut posséder déjà les notions fondamentales du calcul dont il s'agit. Il y a là une conception un peu artificielle, non pas fausse, mais construite après coup, de même que les théories de Lagrange ont suivi celles de Leibniz à un long intervalle. Au lieu de l'adopter *a priori,* n'est-il pas préférable de remonter à l'origine même du Calcul infinitésimal, pour en préciser nettement le caractère et la portée ?

L'étude des fonctions, nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent, appartient en propre à l'Algèbre ; mais, dès qu'on veut examiner comment une fonction se comporte, on ne tarde pas à rencontrer des difficultés pour ainsi dire insurmontables, surtout si cette fonction présente par sa nature une assez grande complexité.

Ces difficultés, à mesure que la science mathématique progressait, se révélèrent surtout à l'occasion de ce que l'on appela le « problème des tangentes », c'est-à-dire à propos de la détermination des tangentes aux courbes en général. Lorsque Descartes eut le premier donné une définition véritablement satisfaisante de la tangente à une courbe, ce grand géomètre et d'autres, parmi lesquels nous nous bornons à citer Roberval et à rappeler Fermat, se mirent à la recherche d'une méthode générale, que Leibniz et Newton eurent enfin la gloire d'ériger en corps de doctrine. Cette origine géométrique de la plus grande découverte mathématique est bien propre à montrer une fois de plus la nécessité première des éléments concrets, même dans les branches du savoir humain qui paraissent les plus abstraites. Mais, pour ne pas empiéter ici sur le domaine de la Géométrie, nous éviterons quant à présent d'y revenir.

L'idée de fonction, nous l'avons dit, est indissolublement liée à l'idée de continuité. Si une fonction d'une variable, $f(x)$, que nous désignerons par y, prend une valeur particulière b lorsqu'on donne à x une valeur particulière a, il

importe de connaître les valeurs, de plus en plus voisines de b, qu'elle prendra quand x prendra des valeurs de plus en plus voisines de a. Si l'on représente par $a + \Delta a$ une valeur de x voisine de a, et par $b + \Delta b$ la valeur correspondante de y, les *accroissements* Δa et Δb de la variable et de la fonction seront évidemment liés entre eux. C'est la recherche de cette liaison qui contient en germe tout le Calcul infinitésimal.

Newton parvint à l'établir en introduisant dans cette recherche des notions mécaniques, par son calcul des *fluxions*. Il considère les vitesses des variations de x et de y ; ce sont ces vitesses qu'il désigne par « fluxions », tandis que x et y elles-mêmes sont les « fluentes ».

Leibniz, au contraire, considérant les accroissements Δa et Δb, ou Δx et Δy, comme de véritables quantités, bien que ce soient des expressions éminemment variables, ne craint pas de les faire entrer directement dans le calcul, et montre suivant quelles règles il y aura lieu de les y faire entrer. C'est la doctrine des infiniment petits, discutable et peu rigoureuse dans sa forme primitive, mais qui s'impose par la simplicité de la mise en œuvre et par la grandeur des résultats obtenus. De nos jours seulement, on est arrivé à montrer toute la rigueur des notations de Leibniz, de beaucoup les plus avantageuses, et de ses méthodes de calcul, que rien n'a pu mettre en défaut. Lagrange, bien plus tard, introduit la notion de *fonction dérivée*. On appelle ainsi, dans la notation qui précède, la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$ lorsque Δa diminue de plus en plus. Pour chaque valeur a donnée à x, cette dérivée a une valeur particulière. C'est donc une fonction nouvelle de x, représentée par $f'(x)$ dans le système de Lagrange.

On peut écrire ainsi

$$f'(x) = \text{lim.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tandis que Leibniz écrira

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

et désignera dy et dx sous le nom de *différentielles* de la fonction et de la variable

Dans la notation de Newton, enfin, on aurait

$$f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

$\dot{y}$ et $\dot{x}$ étant les fluxions de y et de x.

Lagrange, en créant le calcul des dérivées, a remarqué surtout que toutes les fonctions analytiques étudiées sont telles que leur accroissement, Δy par exemple, peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_1 \Delta x + A_2 (\Delta x)^2 + \ldots,$$

et que le coefficient A_1 du premier terme est précisément la dérivée. Au fond, malgré la puissance de son génie, il n'est pas arrivé de la sorte à affranchir la Mathématique de l'idée d'infiniment petit, comme il s'en était flatté, car le développement qu'il prend comme point de départ est loin de pouvoir être admis comme un axiome. D'un autre côté, les notations des dérivées sont d'un usage si incommode, en comparaison de celles de Leibniz, que Lagrange lui-même s'est empressé de recourir à ces dernières, aussitôt qu'il a dû appliquer le calcul, et particulièrement dans sa Mécanique analytique.

Aujourd'hui, les principes se trouvant élucidés d'une façon à peu près satisfaisante, il nous est permis de voir les choses de plus haut, et de constater, dans toutes ces manifestations de tant d'hommes de génie, le développement sous des formes diverses, mais non pas contraires, d'une grande pensée commune. Quant à l'emploi des notations de Leibniz, il est consacré définitivement par l'usage, et c'est justice.

On peut comprendre maintenant le sens qu'il faut attacher à l'expression de fonctions indirectes, employée par Auguste Comte. Ces fonctions indirectes ne sont autres que les dérivées, qui aideront d'une façon si heureuse à l'étude des fonctions dont elles proviennent.

A une étude compliquée, peut-être impossible, viendra se substituer une recherche relativement simple ; et, grâce aux propriétés fournies par le Calcul infinitésimal lui-même, on aura sous la main un outil propre à faire reconnaître la marche générale d'une fonction, à permettre de trouver ses maximums ou ses minimums, de savoir si cette fonction est

croissante ou décroissante ; sans parler des applications géométriques si importantes et pour ainsi dire innombrables.

Dans la théorie des fonctions dérivées, $f'(x)$ étant la dérivée de $f(x)$, cette dernière fonction $f(x)$ est dite la *fonction primitive* de $f'(x)$. Dans la théorie infinitésimale de Leibniz, $f'(x)\,dx$ est la *différentielle* de $f(x)$. Trouver la fonction primitive d'une fonction donnée, ou la fonction qui a pour différentielle une différentielle donnée, ne constitue donc qu'un seul et même problème, d'ailleurs très difficile et à peine ébauché aujourd'hui, malgré des efforts nombreux et considérables.

Ce problème est ce que l'on a appelé dans les siècles derniers le problème inverse des tangentes, et constitue, pris dans sa généralité, ce qu'on nomme le *Calcul intégral,* tandis que la recherche des différentielles ou des dérivées fait l'objet du *Calcul différentiel.*

Telles sont les deux branches qui, réunies, forment le Calcul infinitésimal. Les applications géométriques nous permettront un peu plus loin de caractériser mieux encore et d'éclaircir plus entièrement ces notions générales. Mais nous ne voudrions pas quitter ce sujet sans faire une remarque qui pourra surprendre plus d'un lecteur, tellement elle indique l'irrégularité, nous pourrions dire le caprice, qui préside aux progrès de l'esprit humain.

Le Calcul infinitésimal passe à juste titre pour offrir des difficultés très supérieures à celles du Calcul différentiel. Ce dernier est de création relativement récente. Et cependant, si l'on veut chercher sincèrement les origines du Calcul intégral, c'est jusqu'à Archimède qu'il nous faut remonter. Lorsque cet illustre géomètre déterminait l'aire d'une parabole ou le volume du paraboloïde, il faisait du Calcul intégral bien des siècles avant que le mot ne fût inventé. Les méthodes employées par lui ne différaient pas sensiblement, quant au fond des idées, de celles qui sont encore en usage. Il y a plus : la simple détermination classique du volume du tétraèdre, enseignée aujourd'hui dans nos classes les plus élémentaires, est un problème de Calcul intégral ; ce problème est *identiquement* le même que celui de l'aire de la parabole. Peu de professeurs s'en doutent, et pas un élève ne le devinerait de lui-même. C'est un fait, entre mille,

qui nous montre combien il y aurait de réformes et d'améliorations à apporter dans l'enseignement mathématique.

Divisions du Calcul différentiel. — L'objet principal du Calcul différentiel est, d'après ce qui précède, la détermination des dérivées, et par conséquent des différentielles des diverses fonctions mathématiques. Ce seul problème comprend tout un ensemble de règles obtenues d'après la définition première, et qui s'appliquent aux fonctions élémentaires, algébriques ou transcendantes, à leurs diverses combinaisons, et aussi, ce qui est d'une grande importance, aux fonctions implicites, que nous avons définies plus haut.

Ce n'est pas tout. De la définition de la dérivée découle celle des dérivées des divers ordres ; la dérivée de $f'(x)$ par exemple, étant la dérivée seconde de $f(x)$, que nous désignerons par $f''(x)$ et ainsi de suite. Comme conséquence correspondante, nous aurons la formation des différentielles des divers ordres, exprimables par les notations de Leibniz. Toutes ces déterminations formeront autant de chapitres du Calcul différentiel.

Mais les fonctions d'une seule variable ne sont qu'un cas très particulier ; de même qu'en Algèbre, on devra examiner les fonctions de plusieurs variables, et l'on étudiera les diverses dérivées de ces fonctions, considérées comme dépendant d'une seule variable, les autres restant provisoirement constantes, ou bien on considérera le cas où toutes les variables changent à la fois de valeur. Cela donne naissance aux *dérivées partielles,* d'une part, et de l'autre aux différentielles totales.

Enfin, il est une branche du Calcul différentiel, fort importante en elle-même et surtout au point de vue des applications. C'est celle qu'on désigne sous le nom de changement de variables, et qui peut se résumer dans l'énoncé suivant : certaines fonctions de x, y, z, ... étant données, quelle que soit d'ailleurs la nature de ces fonctions, en trouver les dérivées ou les différentielles des divers ordres en prenant pour variables nouvelles x_1, y_1, z_1, ... qui sont liées aux anciennes par des relations connues. Ce problème peut donner lieu à des opérations de calcul longues et pénibles dans certains

cas particuliers, mais la théorie en est achevée d'une façon aussi parfaite qu'on le puisse désirer.

Une doctrine complète du Calcul différentiel comprend nécessairement aussi les applications de ce calcul à l'étude des fonctions elles-mêmes, c'est-à-dire les variations des fonctions, les déterminations des maximums et des minimums, et enfin les développements des fonctions en séries.

Ce dernier point a été volontairement passé par nous sous silence dans le chapitre précédent, bien qu'on l'incorpore volontiers dans l'Algèbre. Nous nous bornerons ici à l'indiquer rapidement en quelques mots ; il nous paraît du reste appartenir essentiellement par sa nature au domaine infinitésimal. Si l'on a une suite *indéfinie* de termes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \ldots, \quad u_n \ldots$$

telle que chacun d'eux soit une fonction de son rang n, cette suite forme ce qu'on appelle une série. La série est convergente si la somme

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

elle-même fonction de n, tend vers une valeur finie bien déterminée à mesure que n augmente indéfiniment. Or, s'il est possible de mettre la fonction $f(x)$ sous forme d'une série convergente, soit développée suivant les puissances de la variable, soit autre,

$$f(x) = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,$$

on comprend, même au point de vue des applications pratiques, l'intérêt que présentera ce développement en ce qui touche le calcul numérique approximatif de la fonction. Un seul exemple nous le fera comprendre. Le cosinus d'un angle x, développé en série, peut s'écrire

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \ldots.$$

Si x est un angle très petit, la valeur $1 - \frac{x^2}{2}$ limitée aux deux premiers termes, et d'un calcul tout à fait simple, sera entachée d'une erreur extrêmement faible, et dont on connaîtra dans tous les cas une limite supérieure.

Il va sans dire qu'au point de vue théorique pur, cette question des développements des fonctions en séries n'est pas d'une moindre importance.

Formation des équations différentielles. — On appelle équation différentielle une équation dans laquelle entrent une ou plusieurs fonctions inconnues, les variables dont elles dépendent, et leurs dérivées ou différentielles de divers ordres. Pour comprendre l'importance d'une telle notion, le mieux est d'invoquer un exemple simple.

Considérons la fonction implicite y de la variable x définie par l'équation $y^2 - 2px - q = 0$. En appelant y' la dérivée de y, suivant la notation de Lagrange, ou dy et dx les différentielles de y et de x, suivant Leibniz, les règles les plus simples du Calcul différentiel montrent qu'on obtient

$$yy' = p \qquad \text{ou} \qquad y\,dy = p\,dx.$$

Voilà donc une relation qui conviendra à toutes les fonctions y définies par l'équation $y^2 - 2px - q = 0$, quel que soit q. Mais on a encore

$$y'^2 + yy'' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et cette dernière relation est une équation différentielle qui sera aussi vérifiée par toute fonction y définie plus haut, quelles que soient les valeurs de p et de q.

Chacune de ces équations différentielles caractérise donc une famille de fonctions différentes les unes des autres, mais offrant entre elles des analogies et des rapprochements. L'étude d'une équation différentielle peut donc permettre de découvrir des propriétés communes à toutes les fonctions qui la vérifient. D'un autre côté, la mise en équation des problèmes de la nature accessibles aux méthodes mathématiques conduit invariablement, en Mécanique, en Astronomie, en Physique, à des équations différentielles. Remonter de ces équations différentielles aux fonctions, ou, pour employer le langage courant, intégrer les équations différentielles, serait donc résoudre entièrement les problèmes de Mathématique appliquée, et pénétrer les secrets de la nature dans la mesure où nous le permet l'ensemble des procédés

d'observation et de mesure. Malheureusement, c'est là le chapitre le plus difficile et le moins avancé du Calcul infinitésimal.

Calcul intégral. — Les explications rapides qui précèdent étaient nécessaires pour faire comprendre la division du Calcul intégral en deux grands chapitres : intégration des différentielles, intégration des équations différentielles.

Lorsque la fonction $f(x)$ a pour dérivée $f'(x)$, et par suite pour différentielle $f'(x)\,dx$, on dit que $f(x)$ est l'*intégrale* de $f'(x)\,dx$, et l'on écrit

$$f(x) = \int f'(x)\,dx.$$

Réciproquement, si l'on donne la différentielle $\varphi(x)\,dx$, on aura

$$F(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

et $\varphi(x)$ est la dérivée de $F(x)$. Trouver la fonction primitive de $\varphi(x)$ ou intégrer $\varphi(x)\,dx$ constitue donc un seul problème. C'est celui qui, pris dans toute sa généralité et dans toute son extension, fait l'objet de la première partie du Calcul intégral.

Longtemps bornée à des catalogues de fonctions et à quelques procédés particuliers, cette branche du Calcul infinitésimal s'est progressivement enrichie de méthodes plus rationnelles. Mais il s'en faut encore qu'on soit en possession d'instruments satisfaisants, d'un usage assez général. Il faut reconnaître cependant qu'en ce qui concerne les applications, et grâce aux méthodes de calcul approximatives, on ne se trouve pas habituellement trop entravé.

On ne saurait en dire autant lorsqu'il s'agit de l'intégration des équations différentielles, c'est-à-dire de la détermination des fonctions ou des classes de fonctions qui satisfont à une équation différentielle donnée. Dans quelques cas très particuliers seulement, ce problème d'une si haute importance a pu être résolu,

Les traités classiques de Calcul intégral contiennent de volumineux développements et de nombreux chapitres sur l'intégration des équations différentielles. Chaque année,

c'est par centaines, même par milliers, que sont publiés, dans le monde entier, des travaux sur ce sujet. Et cependant, la partie de la science dont il s'agit, si elle ne demeure pas stationnaire, n'avance du moins qu'à pas bien lents. C'est vrai surtout en ce qui touche les équations aux dérivées partielles, dont l'importance serait cependant si grande pour les applications. Cela tendrait à faire croire que certaines des difficultés contre lesquelles on vient se heurter sont d'une nature intrinsèque, si l'on peut ainsi parler, inhérentes au sujet lui-même, et presque insurmontables à l'homme, jusqu'au jour où, par une révolution comparable à l'invention du Calcul infinitésimal, quelque instrument nouveau sera mis au service de l'intelligence humaine et viendra soulager son infirmité.

Intégrales définies. — Une exposition, même rapide et sommaire, des caractères essentiels du Calcul infinitésimal ne saurait être complète sans mentionner au moins les intégrales définies. Leur détermination, en effet, ne comporte pas une intégration dans le sens philosophique du mot : mais elles sont dans les applications d'une importance extrême, et, de plus, elles fournissent à la Mathématique la définition de nouvelles fonctions, de symboles qui peuvent devenir de précieux instruments pour des recherches théoriques ultérieures. Les fonctions eulériennes en sont un exemple ; de même les intégrales elliptiques, sur lesquelles nous aurons à revenir dans le Chapitre suivant. Enfin, pour rester dans un domaine plus élémentaire, c'est dans la notion de l'intégrale définie qu'on doit chercher la véritable origine des logarithmes.

Lorsqu'une fonction $f(x)$ dépend d'une seule variable, si l'on donne à cette variable x toutes les valeurs comprises entre deux nombres a et b, on peut supposer que cet intervalle de a à b ait été partagé en n parties, d'une façon quelconque, par des valeurs intermédiaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dès lors, si l'on forme les quantités

$$f(a)(a_1 - a), \quad f(a_1)(a_2 - a_1), \quad \ldots, \quad f(a_{n-1})(b - a_{n-1})$$

et si l'on en fait la somme, on démontre que la limite de

cette somme, lorsque le nombre n des divisions augmente indéfiniment, tend vers une certaine valeur qu'on représente ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

et que cette valeur est précisément $F(b) - F(a)$, si $F(x)$ est l'intégrale de $f(x)\,dx$, c'est-à-dire si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$. C'est ce qu'on appelle l'intégrale définie de $f(x)\,dx$ entre les limites a et b ou de a à b. Cette intégrale n'est plus une fonction de x, mais seulement des limites a et b. On saura la déterminer numériquement si l'on a pu déterminer la fonction $F(x)$ elle-même. En outre, si à la place de a on a mis une valeur fixe, zéro par exemple, l'intégrale ne sera plus qu'une fonction de b.

Ce qui est important dans les applications, c'est qu'il sera le plus souvent possible de déterminer l'intégrale définie lors même qu'on ne connaîtrait pas la forme algébrique de la fonction $F(x)$; les développements en série sont à cet égard une précieuse ressource, et permettent d'aborder ainsi des questions qui ont plus d'une analogie, comme le fait justement remarquer Auguste Comte, avec la résolution numérique des équations.

Calcul des variations. — L'un des problèmes qui préoccupèrent le plus les mathématiciens, dans les deux derniers siècles, fut celui des *isopérimètres*. Le mot est trop particulier, et vicieux par conséquent, mais il a le mérite de rappeler, sous une forme assez simple, l'origine géométrique des questions dont il s'agit. En voici le type : quelles sont, parmi toutes les courbes de même longueur tracées entre deux points donnés, celles dont l'aire est un maximum ou un minimum ?

Dans toute son extension, le problème consiste dans la détermination de la forme d'une fonction inconnue, pour qu'une certaine intégrale définie, dépendant de cette fonction, ait une valeur maximum ou minimum entre des limites assignées.

Les exemples de problèmes de cette nature furent variés à l'infini, et des dépenses prodigieuses d'ingéniosité et d'habi-

leté furent faites par de grands géomètres, jusqu'au jour où Lagrange vint en apporter une solution entièrement générale, par la création du Calcul des variations. Nous ne pouvons songer à en exposer ici les principes, mais il est bon de mettre en relief l'idée de génie qui l'a inspiré. Elle consiste dans la considération de différentiations nouvelles, auxquelles il applique la caractéristique particulière δ, et qui résultent, non plus des accroissements des variables, mais d'une modification infiniment petite dans la forme de la fonction. A ces différentielles spéciales, Lagrange donne le nom de variations. Il institue sur les variations tout un ensemble de règles de calcul qui permettent de les soumettre aux mêmes opérations que les différentielles et de les combiner avec ces dernières. Dès lors, les problèmes considérés sont ramenés à des questions ordinaires de maximum ou de minimum.

Du jour où fut créée cette branche nouvelle et si intéressante du Calcul infinitésimal, on cessa d'inventer comme à plaisir des exemples de problèmes d'isopérimètres, dont le principal intérêt tenait à la difficulté particulière que présentait chacun d'eux. Cet intérêt se trouvait effacé par la généralité de la méthode de Lagrange.

CHAPITRE V.

LA THÉORIE DES FONCTIONS.

Explication préliminaire. — Après ce que nous avons dit dans les deux derniers chapitres, plus d'un lecteur, en voyant le titre de celui-ci, aura le droit d'éprouver un certain étonnement. L'Algèbre a pour but essentiel l'étude des fonctions ; le Calcul infinitésimal introduit dans cette étude des moyens nouveaux d'investigation et de démonstration. Ne semble-t-il pas que tout doive se borner là, et qu'il n'y ait plus place pour une doctrine nouvelle ?

Penser qu'il en est ainsi, cependant, serait méconnaître la plus grande et la plus belle part, peut-être, de l'œuvre mathématique du XIX^e^ siècle. A cette partie de la Science s'attachent les noms de Legendre, Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Fuchs, Halphen, Sophus Lie, et de MM. Mittag-Leffler, Klein, Schwarz, Picard, Poincaré, pour ne citer que les plus fameux. A l'heure présente, c'est peut-être dans cette direction que se poursuivent les plus importants travaux mathématiques parmi les géomètres contemporains.

Origine de la Théorie des fonctions. — Lorsque, après la découverte du Calcul infinitésimal, on se mit à l'œuvre pour aborder l'intégration des expressions algébriques, il fallut bientôt reconnaître que certaines intégrations de cette nature, simples en apparence cependant, présentaient une difficulté insurmontable et résistaient à tous les efforts. On s'était habitué jusqu'alors à ne guère considérer d'autres fonctions que celles qui pouvaient s'exprimer par les signes ordinaires de l'Algèbre ; et l'obstacle contre lequel on venait se heurter démontrait jusqu'à l'évidence que cette conception de l'idée de fonction devait être étendue. Les intégrales nouvelles qu'on n'arrivait pas à déterminer n'en constituaient pas moins de

véritables fonctions transcendantes nouvelles. Quelques-unes de ces transcendantes se présentèrent à l'occasion de la détermination de la longueur d'un arc d'ellipse, ce qui leur valut, ainsi qu'à d'autres intégrales analogues, la désignation d'*intégrales elliptiques*. A ces intégrations, au nombre de trois, furent ramenées toutes les intégrales d'expressions contenant la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré. C'est à ces intégrales que Legendre, avec une admirable patience, consacra une grande partie de sa vie ; mais, malgré l'importance de ses travaux, il en méconnut le caractère essentiel.

Pour élucider la question, il était nécessaire de considérer les inverses des intégrales elliptiques, car ce sont ces fonctions inverses qui offrent en réalité des propriétés caractéristiques. Mais la foule des vérités mathématiques qui devaient sortir de là exigeait d'autre part l'extension des opérations du calcul aux quantités dites imaginaires. C'est l'un des principaux titres de gloire de Cauchy d'avoir jeté sur cette dernière question de véritables flots de lumière ; antérieurement, Jacobi avait fait ressortir les principales propriétés des nouvelles fonctions, et surtout leur double périodicité.

Cette notion de la double périodicité joue dans cette théorie un si grand rôle qu'il nous semble intéressant de faire comprendre en gros quelle en est l'essence. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est telle qu'elle reprend des valeurs pareilles pour des valeurs de x qui diffèrent entre elles d'une quantité déterminée, si bien que l'on a

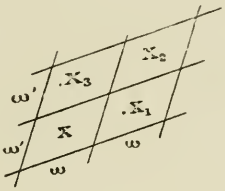
$$f(x) = f(x + d) = f(x + 2d) = \ldots$$
$$= f(x - d) = f(x - 2d) = \ldots,$$

quel que soit x, on dit que la fonction $f(x)$ est *périodique*, et que la *période* est d. Par exemple, toutes les fonctions circulaires de la Trigonométrie sont périodiques, par leur définition même.

Lorsqu'on étend aux imaginaires la notion de fonction, on peut, comme nous l'avons précédemment indiqué, représenter par une droite limitée OX la variable x. A chaque position de X sur le plan correspondra une valeur y de la fonction $f(x)$, valeur en général imaginaire et représentable par OY. Le point X, au lieu de se déplacer sur une

droite, doit varier dans tout le plan lorsqu'on donne à la variable x toutes les valeurs possibles. Or, si l'on a tracé sur ce plan un réseau de parallélogrammes tous pareils et si le point X vient en X_1, X_2, X_3, ... occuper des positions semblables dans les divers parallélogrammes, il peut arriver que

Fig. 4.



la fonction $f(x)$ reprenne chaque fois exactement la même valeur. On dit alors qu'elle est *doublement périodique*. Les deux *périodes* sont les quantités imaginaires ω, ω' représentées par les deux côtés du parallélogramme, et il est clair qu'on a

$$f(x) = f(x + n\omega + n'\omega'),$$

n et n' étant deux nombres entiers quelconques.

Les fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions inverses des intégrales elliptiques, jouissent de cette propriété qui est absolument fondamentale, et qui n'aurait jamais pu s'établir sans l'introduction des imaginaires dans le calcul. Ces fonctions se rencontrent à tout instant dans les questions de Mécanique ou de Physique. Elles permettent d'exprimer des intégrales impossibles sans ce secours nouveau, et l'on comprend même qu'elles rendent praticable l'évaluation numérique de ces intégrales, si des Tables en ont été préalablement dressées. Mais, pour l'instant, c'est leur intérêt théorique qui nous semble principalement digne de retenir et de fixer l'attention du lecteur.

Il est permis de se demander si la pénétration de la méthode des quaternions n'est pas appelée dans l'avenir à étendre encore les notions dont nous venons de parler, et à devenir l'origine de nouveaux progrès. La représentation des quantités dans l'espace nous fait entrevoir la possibilité de fonctions triplement périodiques, de même que la double

périodicité est née de l'introduction des imaginaires. Mais ce ne sont là que des conjectures sur un avenir peut-être encore bien lointain.

Classification des fonctions. — Les fonctions elliptiques, nous venons de le voir, donnèrent à l'idée de fonction une généralisation extrême. Les études qui se poursuivirent ensuite conduisirent les auteurs à distinguer, d'après telles ou telles de leurs propriétés, les fonctions en familles de plus en plus nombreuses : il y eut même un luxe de dénominations dont il ne convient pas de se féliciter, car c'est à peine si l'on s'y reconnaît encore aujourd'hui, des expressions différentes servant souvent à désigner des choses identiques.

Cependant un certain ordre a commencé à s'établir, et, la première période d'enfantement passée, le chaos est devenu progressivement moins obscur. Il en a été de même des notations, primitivement peu ordonnées, pas toujours rationnelles, et qui ont ajouté aux grandes difficultés que le sujet comportait par lui-même. Nous n'essaierons pas ici de rappeler quelques-unes des dénominations employées. Mais ce que nous voulons retenir, c'est une idée générale, qui consiste essentiellement à classer une fonction par ses *singularités* ; on appelle ainsi toutes les valeurs dans le voisinage desquelles il se produit un fait exceptionnel ; cette notion mathématique emprunte beaucoup à la Géométrie, à l'exemple d'un grand nombre d'autres. Ce sont ces singularités qui, par leur nature et leur distribution, fournissent les éléments d'une classification rationnelle ; à chaque famille de fonctions correspondent certaines singularités, toujours les mêmes, qui caractérisent cette famille. Cette classification semble avoir contribué dans une très large mesure aux progrès de la Théorie des fonctions.

Étude des fonctions. — Dans l'ordre d'idées qui nous occupe, les fonctions ne sauraient s'étudier, comme on le fait en Algèbre, sur les symboles dont on se sert pour les représenter, puisque ces symboles n'existent plus. Elles sont définies, comme nous venons de le dire, par leurs singularités, et ces singularités sont elles-mêmes révélées par l'examen des équations différentielles correspondantes. Le

nombre des propositions générales sur les fonctions ainsi définies, sur leurs relations et leurs propriétés respectives, est devenu très grand, et quelques-unes de ces propositions, en raison de leur généralité, présentent une importance de premier ordre. C'est tout un monde nouveau qui se révèle, et dont les plus illustres géomètres des siècles précédents ne pouvaient même avoir la pensée. Le calcul n'intervient plus à la manière habituelle, il ne se met pas au service du raisonnement, pour le soulager et le suppléer au besoin. Il faut (et c'est la plus grande difficulté de cette branche de la Mathématique) attaquer ici les problèmes en eux-mêmes, pénétrer jusqu'au fond la nature des choses, remonter aux origines et aux définitions, et n'avoir recours au calcul, dans le sens habituel du mot, qu'à titre d'instrument accessoire, bien qu'il présente souvent par lui-même de très grandes difficultés.

Cette méthode d'étude des fonctions sur les équations différentielles auxquelles elles satisfont devait avoir par contre-coup, comme conséquence, une influence considérable sur la théorie des équations différentielles elles-mêmes et sur leur intégration. Il n'y a pas lieu, dans le sens moderne, et en se plaçant au point de vue de la Théorie des fonctions, d'attribuer à ce mot d'intégration une signification identique à celle qu'il avait dans le Calcul infinitésimal ordinaire. C'est ce que M. Painlevé, par exemple, a très nettement fait ressortir dans ses remarquables *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Une intégrale est *uniforme* lorsqu'elle n'admet qu'une seule détermination. Or (nous citons ici M. Painlevé), « dans ces dernières années, grâce surtout aux travaux de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler, la représentation des fonctions uniformes a fait de tels progrès qu'il sera toujours possible, si l'intégrale est uniforme, de la définir et de la suivre dans tout son domaine d'existence, à l'aide d'un développement unique, et c'est en cela précisément que consiste l'intégration entendue dans son sens le plus large ».

Cela explique et justifie cette remarque du même auteur, placée dès le début de ses *Leçons* : « Une équation dont l'intégrale est uniforme doit être regardée comme intégrée au sens moderne de ce mot. »

Il semble au premier coup d'œil que des spéculations aussi purement théoriques nous éloignent bien de la conception générale ordinaire de la Mathématique, et soient en contradiction avec la possibilité de se servir des instruments dont il s'agit au point de vue des applications.

On affirme cependant (et, je le crois, avec raison) que certaines des fonctions nouvelles dont il s'agit, et notamment les fonctions elliptiques, sont de nature à rendre des services importants, non seulement à ceux qui cultivent la science pure, mais même à ceux qui l'appliquent, comme les ingénieurs par exemple.

Il est facile de faire tomber cette apparente contradiction, si l'on veut bien y réfléchir et regarder les choses d'un peu près. Pour qu'un problème quelconque soit utilisable au point de vue pratique, il suffit que les résultats en puissent être traduits en nombres, dans chaque cas particulier, avec une approximation déterminée, qui corresponde aux nécessités de la question elle-même et aux erreurs que nous commettons nécessairement dans nos observations, nos expériences et nos mesures. Dès lors, si une expression, dont nous n'avons pas la notion par un symbole particulier, peut être obtenue par un développement en série, la faculté de calculer cette expression avec telle approximation que nous pouvons désirer s'ensuit nécessairement.

La tâche du mathématicien pur est terminée, quand il a indiqué de la sorte comment *on pourrait* trouver la solution ; le reste n'est plus qu'une question d'Arithmétique, plus ou moins pénible, qu'on pourra faciliter par la construction préalable de tables, ou par des artifices plus ou moins ingénieux.

A voir de près les choses, n'en est-il pas de même pour les fonctions les plus élémentaires, pour les lignes trigonométriques ou les logarithmes, par exemple ? Lorsqu'un résultat est exprimé par une formule contenant de telles fonctions, est-ce autre chose qu'une indication de calculs à faire, et de calculs approchés ? Et néanmoins tous les ingénieurs, tous les praticiens ayant besoin d'appliquer la Mathématique hésitent-ils à se servir d'un sinus ou d'un cosinus, ou à ouvrir une table de logarithmes ?

En cette matière, comme en beaucoup d'autres, les

habitudes prises jouent un grand rôle ; mais il est à présumer que, dans un avenir qui n'est pas bien éloigné, les résultats de la Théorie des fonctions pénétreront dans les applications elles-mêmes et y rendront d'éclatants services.

L'interpolation. — C'est avec intention que j'ai tenu à incorporer ce sujet dans le présent chapitre, bien qu'il n'ait pas un rapport direct avec les développements qui précèdent. Habituellement, le problème de l'interpolation est traité, ou plutôt effleuré dans les cours d'Algèbre, où il semble tenir une place accessoire. Dans les limites étroites où d'habitude on l'enserre, il est assez naturel d'en agir ainsi. Mais la portée du problème général de l'interpolation est à mon avis bien plus étendue ; à cause du rôle que joue cette question dans la Mathématique appliquée, elle constitue l'un des plus intéressants chapitres de la philosophie naturelle. En raison de cette importance, elle prend un caractère très général qui mérite qu'on lui face une place à part, même dans le domaine de la Mathématique pure. Ce caractère de l'interpolation paraît avoir été quelque peu méconnu, puisque, même à l'heure actuelle, on a mutilé sur ce point certains programmes d'examens à un degré que rien n'excuse. Nous reviendrons, s'il y a lieu, sur ce point spécial en parlant de l'enseignement mathématique ; pour l'instant, nous voulons simplement tirer argument de ce délaissement injustifiable, en faveur de la nécessité d'une explication un peu développée.

Lorsqu'on entreprend l'étude d'une loi naturelle quelconque, d'une relation de cause à effet, il s'agit en général de savoir comment varie une grandeur lorsque certaines autres grandeurs sont elles-mêmes variables. Autrement dit, les lois sont exprimées par des fonctions naturelles, et l'application de la Mathématique doit avoir pour objet final de transformer ces fonctions naturelles en fonctions mathématiques.

Nous supposerons tout d'abord, pour plus de simplicité, qu'il s'agisse d'une seule variable indépendante. Dans certains cas, des considérations *a priori*, des hypothèses plausibles ou des notions antérieurement acquises peuvent permettre de formuler la loi dont il s'agit ; et, dès lors, l'ex-

périence n'a plus à intervenir qu'à titre de vérification, si cette loi est vraie. Mais dans bien d'autres circonstances, en Météorologie, par exemple, où les considérations purement théoriques sont perpétuellement en défaut dans l'état présent de cette science, il est manifestement impossible de procéder comme nous venons de le dire. Tout au contraire, il faut mettre les faits, c'est-à-dire l'expérience, à la base de la science, enregistrer ces faits avec les mesures qu'ils comportent, et tâcher de dégager de cet amoncellement de matériaux la loi mathématique que l'on poursuit, ainsi que le fit Kepler pour les mouvements des planètes.

Mais l'expérience ne nous donne pas directement, avec l'approximation et la rigueur requises, les valeurs en nombre infini d'une fonction répondant à l'infinité des valeurs correspondantes de la variable dans un intervalle déterminé.

Nous ne pouvons retenir, comme présentant des garanties suffisantes, qu'un certain nombre de valeurs de la fonction inconnue $y_1, y_2, \ldots, y_n$, correspondant à des valeurs déterminées de la variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chaque couple de valeurs correspondantes de x et de y représentant une expérience ou une observation.

Cela étant, le problème de l'interpolation mathématique consiste à trouver une fonction $f(x)$ qui prenne les valeurs données de y pour les valeurs correspondantes de x.

Par sa nature même, ce problème est essentiellement indéterminé, ce que l'on comprend instinctivement si l'on remarque qu'il se réduit à celui-ci : tracer une ligne qui passe par n points donnés. Le nombre des solutions est infini ; mais, avec quelques conditions imposées, il est possible d'en faire une question ne comportant plus qu'une solution unique. Si, par exemple, on s'impose la condition que $f(x)$ sera un polynome entier en x, et que le degré de ce polynome sera au plus égal à n, Lagrange a donné une formule, très symétrique et fort remarquable, qui constitue la solution désirée. A Newton on en doit une autre, également fort intéressante, et qui résout le même problème dans le cas particulier où toutes les valeurs $x_1, x_2, .., x_n$ de la variable indépendante se succèdent en progression par différence.

Mais de telles solutions particularisent à un degré extrême un problème tout à fait général par sa nature ; Cauchy a

montré comment on pouvait aussi interpoler par l'emploi d'une fraction algébrique, et non plus d'un polynome ; en outre, quelques autres études ont eu pour résultat de faire voir comment il était possible d'employer pour cet objet une forme de fonction dont on dispose à volonté, ce qui peut présenter de sérieux avantages suivant la nature de la loi qu'on veut essayer de traduire en formule.

Il faut citer aussi Ampère, qui paraît avoir le premier, par l'emploi des fonctions qu'il a nommées *interpolaires,* indiqué comment il est possible de poursuivre une interpolation, c'est-à-dire de la modifier à mesure qu'on enregistre de nouveaux couples de valeurs de la fonction et de la variable, sans perdre le bénéfice des calculs antérieurement effectués.

Malgré tout, ce problème n'est encore qu'ébauché, et il reste beaucoup à faire pour le présenter sous une forme entièrement générale. Les conditions données peuvent ne pas consister exclusivement en valeurs correspondantes, ainsi que nous l'avons supposé. On pourrait, par exemple, assujettir la fonction y à avoir une dérivée prenant des valeurs données pour certaines valeurs de la variable, tandis que la fonction prendrait elle-même des valeurs données pour d'autres valeurs de la variable.

En outre, les valeurs enregistrées, si elles proviennent directement de l'observation des faits, étant fatalement entachées d'erreurs, il y aurait lieu d'examiner s'il ne serait pas avantageux de laisser une certaine élasticité aux formules dans les limites possibles de ces erreurs, et d'étudier les conséquences de telles variations.

Il serait intéressant de ne pas borner la question, comme on le fait d'habitude, aux seules fonctions réelles de variables réelles, et de l'étendre aux quantités imaginaires et même peut-être aux quantités géométriques de l'espace.

Enfin, l'hypothèse d'une seule variable indépendante est tout à fait particulière, et la plupart des fonctions de la nature dépendent de plus d'une variable. La recherche des fonctions, d'une espèce quelconque, de plusieurs variables, satisfaisant à des conditions déterminées, ou ne s'écartant de ces conditions que dans des limites assignées à l'avance, laisse donc ouvert, comme on le voit, un vaste champ d'investigation, et pourra faire l'objet de bien des recherches

nouvelles. Le problème, sous cette forme extrêmement générale, et à cause même de cette généralité, présente des difficultés de plus d'une nature. La recherche des formes les plus simples des fonctions employées, suivant le degré d'indétermination qui subsiste, serait à elle seule d'un haut intérêt. Enfin, et en dehors de l'utilité directe, pour ainsi dire, en ce qui touche les diverses sciences naturelles auxquelles la Mathématique peut s'appliquer, il semble qu'il y ait là une sorte de prolongement de la Théorie des fonctions. Cela justifiera, je l'espère, aux yeux du lecteur, l'insistance que j'ai apportée sur cette question de l'interpolation.

CHAPITRE VI.

LA GÉOMÉTRIE.

Origine des notions géométriques. — Par l'observation des objets qui nous entourent, nous arrivons à la conception de l'espace dans lequel nous vivons et dans lequel ces objets occupent une certaine étendue. Nous constatons en même temps qu'ils présentent une forme. Les formes des objets sont variées à l'infini; mais, parmi elles, quelques-unes nous frappent par leur apparente régularité. Bien que cette apparence ne tienne qu'à l'imperfection de nos sens, elle entre pour une très large mesure dans les impressions ressenties par nous, et les dispositions régulières dont nous parlons prennent dans notre cerveau une existence qui se manifeste avec une intensité puissante. Là, comme toujours, nous avons fait de l'abstraction, inconsciente ou voulue, et l'abstraction est venue prendre la place de la réalité naturelle qui l'a provoquée. De même que les abstractions sur les collections sont la base première des notions arithmétiques, les abstractions effectuées sur les formes sont l'origine de nos conceptions géométriques.

Imaginons, par exemple, un cube en marbre parfaitement poli. La forme de ce cube résulte, pour nos sens, de ce qu'il occupe une certaine position dans l'espace; nous arrivons à séparer ainsi l'espace en deux régions : celle qui est occupée par le cube et celle qui lui est extérieure. La limite qui sépare ces deux régions est pour nous une *surface,* la région intérieure est un *volume,* surface et volume dont nous nous faisons l'idée indépendamment du corps considéré, qui pourrait aussi bien être en verre, en bois ou en métal, tout en conservant la même forme.

Cependant, si nous y regardions de très près, nous verrions, par exemple avec un microscope d'un grossissement

indéfini, que cette surface n'existe pas telle que nous la concevons, que les particules composant le corps sont distribuées, au contraire, de la façon la plus confuse; mais la conception *surface*, répondant aux apparences premières, n'en a pas moins pris possession de notre cerveau à l'état d'abstraction.

En regardant ensuite cette surface, nous reconnaissons qu'elle se compose de plusieurs parties bien distinctes, au nombre de six; que deux de ces parties, voisines l'une de l'autre, ont en commun une *ligne;* que les lignes ainsi formées viennent elles-mêmes se rencontrer aux sommets du cube, que nous désignons sous le nom de *points*.

Un examen un peu plus attentif nous montre que les diverses surfaces dont nous venons de parler jouissent de propriétés particulières d'après lesquelles nous les qualifions de *surfaces planes* ou de *plans;* que les rencontres de ces plans sont des *lignes droites*. Et nous avons la notion précise du plan, de la ligne droite, du point par la seule contemplation de l'objet, bien que, pas plus que dans aucun des corps existant dans la nature, il n'y ait ni plan, ni droite, ni surface, ni ligne, ni point. Mais toutes ces abstractions sont indispensables à la constitution de la Science, et, d'autre part, elles sont assez rapprochées de la réalité pour que l'erreur que nous commettons volontairement en les substituant aux choses réelles ne puisse présenter le moindre inconvénient, même dans la pratique.

Ces êtres de raison, surfaces, lignes, points, placés dans ce que nous appelons l'*espace,* sont les éléments des figures géométriques. Une fois l'abstraction première effectuée, nous pouvons, par des combinaisons à l'infini de ces divers éléments, créer, par notre seule imagination, tout le monde des faits géométriques.

Il est seulement nécessaire de compléter ces notions par des définitions aussi précises que possible, et par des axiomes, vérités évidentes qui ne sont le plus souvent que des définitions déguisées, comme l'a si justement fait remarquer M. H. Poincaré dans son remarquable article *Sur les Géométries non euclidiennes,* publié dans la *Revue générale des sciences* (1891, p. 769), article sur lequel nous aurons à revenir tout à l'heure.

Les géomètres de l'antiquité ont poussé à un très haut degré de perfection cette branche de la Science, et l'on ne saurait assez admirer les prodigieux résultats auxquels ils sont parvenus, avec des moyens d'action aussi limités que ceux qu'ils possédaient. Mais l'erreur fondamentale qu'ils commirent, et qui est encore très généralement commise de nos jours, consistait dans la méconnaissance de l'élément expérimental qui est à la base de la Géométrie. Ils croyaient, comme beaucoup de savants n'ont cessé de le croire, que la Science est d'autant plus pure qu'elle se rapproche plus complètement d'une suite d'opérations empruntées à la logique abstraite, sans aucune considération du monde extérieur.

Les axiomes et les diverses Géométries. — C'est à une époque toute récente, au cours du XIX^e^ siècle, que l'attention des savants et des philosophes a été appelée sur ces questions. L'occasion en a été offerte par les efforts auxquels on s'était livré vainement pour démontrer une vérité fameuse, connue sous le nom de *postulatum* ou d'*axiome d'Euclide,* et qui peut s'énoncer ainsi : par un point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite. Des hommes tels que Gauss, et plus tard Helmholtz, n'ont pas dédaigné de s'occuper de cette question. Mais elle paraît avoir été élucidée à la suite des travaux de deux grands esprits : Lobatschefsky (de Kazan) et le hongrois Bolyaï, qui, sans se connaître ni connaître leurs recherches, parvinrent à des résultats analogues. A leur suite, Riemann, Beltrami et d'autres encore consacrèrent de savantes recherches à cette étude, sans parler de beaucoup de savants dont les travaux ont été synthétisés par l'article de M. Poincaré que nous avons rappelé plus haut.

Nous ne pouvons essayer même de donner ici une idée de ces doctrines ; mais il est facile d'en extraire la substance en peu de lignes. Il suffit de constater ce fait, actuellement hors de doute, qu'en supprimant le postulatum d'Euclide, il est possible de construire de toutes pièces un système de Géométrie parfaitement logique, système variable suivant la proposition par laquelle on a cru devoir remplacer le postulatum.

La vérité, c'est qu'en dehors des axiomes qu'on énonce expressément, il en existe beaucoup d'autres, les uns pouvant prendre la forme de définitions, d'autres, d'une nature plus profonde, inhérents à la conception que nous nous faisons de l'espace. Et comme cette conception est absolue, par essence, tandis que nous ne pouvons jamais juger des choses que relativement, on en vient à reconnaître la profonde justesse de cette conclusion de M. Poincaré ; « Il n'y a pas de Géométries plus ou moins vraies ; il y a des Géométries plus ou moins commodes. »

L'étude des Géométries non euclidiennes doit donc être regardée comme un exercice de l'esprit, pouvant même conduire incidemment à des résultats d'un véritable intérêt et jeter de la lumière sur les sciences voisines. Mais, en ce qui concerne l'étude de l'étendue, de ses propriétés et de sa mesure, la conception euclidienne sera toujours d'un usage universel, comme répondant mieux que toute autre à la notion naturelle de l'espace telle qu'elle se présente à nous par l'observation de la nature. Seulement, il est indispensable de l'accepter très franchement et de se dire que le perfectionnement ne consisterait pas à supprimer des axiomes pour leur substituer des démonstrations introuvables; mieux vaudrait au contraire mettre plus complètement en évidence les axiomes implicites que nous employons à notre insu, comme par exemple les suivants : l'espace est infini; il est partout identique à lui-même; une figure peut être transportée de toutes pièces dans l'espace sans subir de modifications, etc.

C'est dorénavant de la seule Géométrie euclidienne que nous nous occuperons dans ce qui va suivre.

Divisions de la Géométrie. — Comme toutes les branches de la Mathématique, la Géométrie est sans bornes. Son objet essentiel est la mesure de l'étendue ; mais, cette mesure ne pouvant pour ainsi dire jamais s'effectuer par voie de comparaison directe, ce n'est qu'en accumulant les connaissances sur les propriétés des figures qu'il est possible d'arriver indirectement au but que l'on poursuit. Parmi ces propriétés, les unes concernent explicitement des questions de mesure, et on les a appelées propriétés *métriques:* on a donné aux autres le nom de propriétés *descriptives.* Ce n'est pas néan-

moins sur cette distinction, relativement récente, que pourrait être instituée la Géométrie, car, dans l'étude de presque toute figure, propriétés descriptives et métriques doivent être envisagées concurremment si l'on veut que cette étude soit complète.

Nous avons vu plus haut que les éléments des figures géométriques sont des volumes, des surfaces, des lignes et des points. De cet ordre logique, en le renversant, on peut conclure l'ordre contraire, en faisant intervenir le mouvement, et en regardant une ligne comme engendrée par le déplacement d'un point, une surface par le déplacement d'une ligne, et un volume par le déplacement d'une surface limitée et définie.

On pourrait, de la sorte, imaginer la Géométrie des lignes, ne comportant que la notion d'une seule dimension, celle des surfaces, à deux dimensions, et celle des volumes ou de l'espace, à trois dimensions. Mais, parmi les lignes, il en est une, la plus simple de toutes, la ligne droite, dont la notion nous est familière, bien que la définition en soit impossible. Parmi les surfaces, le plan est en général l'objet d'une définition qui n'en est pas une, car elle se réduit à une simple propriété expérimentale, vérifiable seulement par à peu près, savoir qu'on peut sur cette surface appliquer en entier une ligne droite dans une position quelconque. Mais le plan nous apparaît quand même, par suite d'un axiome si l'on veut, comme la plus simple de toutes les surfaces.

Ceci nous indique la possibilité d'une classification nouvelle, qui est à peu près celle que nous voyons en vigueur aujourd'hui, à une seule exception près : Géométrie sur la droite, à une dimension; Géométrie sur le plan, à deux dimensions; Géométrie dans l'espace, ou à trois dimensions. La première de ces trois parties n'est généralement pas même indiquée; on n'y attache aucune importance et l'on a grand tort; car ce domaine de la ligne droite, pour être plus restreint, n'en renferme pas moins un ensemble de propriétés intéressantes en elles-mêmes, et dont un grand nombre peuvent être avantageusement utilisées pour la Géométrie à deux ou à trois dimensions.

La Géométrie des anciens. — L'œuvre géométrique de

l'antiquité est à peu près exactement représentée de nos jours par ce que l'on a coutume d'appeler la *Géométrie élémentaire*. Non seulement le fond de la pensée, mais aussi la forme de l'exposition, ont été conservés avec une sorte de soin religieux qui est intéressant au point de vue historique, mais qui ne laisse pas de présenter certains inconvénients sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir plus tard. La division en huit livres, naguère encore universellement classique, reproduisait, à peu de variantes près, l'ancienne ordonnance de la Géométrie. Dans les deux premiers livres on étudie les figures planes formées par des droites, puis le cercle et les angles, sans qu'aucune propriété métrique concernant les longueurs de droites se présente. Puis, dans le troisième livre, intervient la notion du rapport de deux longueurs; ce livre et le suivant sont consacrés aux propriétés qui s'ensuivent, à la détermination des aires polygonales, puis à l'étude des polygones réguliers, dont le cercle est considéré comme la limite.

Avec le cinquième livre, on commence à aborder la Géométrie des points, des droites et des plans dans l'espace, d'abord au point de vue purement descriptif; le sixième a pour objet les mesures concernant les polyèdres, le septième les figures sphériques les plus simples, et le huitième les mesures des surfaces et volumes des *corps ronds*. On appelle ainsi le cylindre de révolution, le cône de révolution et la sphère.

Une rapide étude des coniques (surtout de l'ellipse et de la parabole), qualifiées parfois de la dénomination de « courbes usuelles », qui est au moins bizarre, forme une sorte de complément à cette partie de la Géométrie. Tout cela est le plus souvent présenté comme une suite de vérités qu'on énonce d'abord, pour les démontrer ensuite, en s'appuyant uniquement sur les définitions, sur les axiomes et sur les propositions précédentes. Lorsque, par exception, le calcul intervient, on s'attache à lui conserver une forme un peu archaïque ; il semble qu'on se refuse de parti pris à profiter des ressources et des simplifications que pourrait offrir l'Algèbre.

Cette science nous présente l'un des exemples les plus frappants de la puissance logique de l'esprit humain, quand

on se reporte surtout à l'époque où elle fut constituée. Il est remarquable, notamment, que les anciens soient arrivés à découvrir tant de propriétés à des sections coniques.

Ce qui est encore plus étonnant, c'est la fécondité des ressources et la puissance des méthodes employées. Des travaux historiques d'une époque récente ont montré que certaines propriétés qu'on serait tenté de croire toutes modernes avaient été découvertes par les géomètres grecs et sans doute même auparavant.

Parmi ces méthodes géométriques, d'une application générale, l'idée la plus digne d'admiration peut-être est celle des lieux géométriques. Lorsque tous les points d'une figure jouissent d'une propriété déterminée, à l'exclusion de tous autres points, on dit que cette figure est le lieu géométrique des points jouissant de cette propriété. Il y a là l'élément d'une définition, ou plutôt de définitions diverses de toute figure géométrique. L'équivalence de ces définitions, qui permet de déduire d'une propriété tout un ensemble de propriétés nouvelles, est assurément l'un des objets essentiels de la Géométrie. Mais les lieux géométriques ont encore, pour la résolution des problèmes, une utilité d'un autre ordre, facile à comprendre; si l'on demande de trouver un point jouissant des propriétés (A) et (B), si le lieu des points jouissant de la propriété (A) est une figure F, et si le lieu des points jouissant de la propriété (B) est une figure F′, la solution du problème se composera de tous les points communs aux deux figures F, F′. Soit, par exemple, qu'on demande de trouver sur un plan un point M également distant de deux droites D et D′ et tel que le rapport $\frac{MP}{MP'}$ de ses distances à deux points P et P′ soit donné. On sait: 1° que le lieu des points également distants de deux droites se compose de deux autres droites, les bissectrices Δ et Δ′ des angles formés par les droites données D et D′; 2° que le lieu des points tels que $\frac{MP}{MP'}$ soit de grandeur donnée est une circonférence. Il s'ensuit que les solutions seront les points communs à cette circonférence et à ces deux droites Δ et Δ′. Il pourra y en avoir quatre, deux ou pas du tout. Exceptionnellement, ce nombre pourra devenir 3 ou 1.

On retrouvera un peu plus loin, en Géométrie analytique, cette notion si féconde des lieux géométriques autour de laquelle pivote toute la science de l'étendue, et dont l'honneur appartient incontestablement aux géomètres de l'antiquité.

La Géométrie moderne. — Au cours du XIX^e^ siècle, la Géométrie a été l'objet d'une sorte de renaissance dans laquelle notre pays tient une place particulièrement glorieuse. Chasles et Poncelet en sont peut-être les plus illustres représentants. Bien que l'œuvre de Chasles et de ses continuateurs ait eu pour objet principal d'éviter la nécessité du calcul, il est permis de se demander si leurs belles découvertes auraient pu se produire sans le besoin de généralisation que l'introduction du calcul avait provoqué. Ce n'en fut pas moins une réaction salutaire, une revanche de la raison contre le mécanisme des méthodes, de la clarté contre les procédés qui conduisent au but par des voies souvent obscures.

La pierre angulaire du bel édifice dont Chasles fut l'architecte de génie, c'est la notion du rapport anharmonique, qui fut connu avant lui, mais dont personne n'avait su tirer parti à un tel degré. Si deux points A et B sont situés sur une droite, et si deux autres points C et D sont sur la même droite, C divise le segment AB dans un certain rapport $\frac{CA}{CB}$ et D divise le même segment dans le rapport $\frac{DA}{DB}$; le rapport de ces deux rapports, c'est-à-dire $\frac{CA}{CB}\,\frac{DB}{DA}$ est le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D. C'est là l'origine première des théories de l'homographie, de l'homologie, de l'involution, qui rentrent dans la Géométrie moderne, bien que Desargues ait connu et utilisé l'involution. Rien ne peut donner une idée de l'abondance des propiétés que ces théories ont révélées, entre les mains d'habiles géomètres.

Un autre caractère essentiel de cette Géométrie moderne a été la considération de figures autres que les points, les lignes et les surfaces. Je veux parler des complexes et congruences, dont il convient de donner ici une idée géné-

rale, en se bornant au cas, particulièrement simple, des complexes et congruences linéaires. Lorsqu'une droite est assujettie à une condition simple, on dit qu'elle engendre un complexe ; si elle est assujettie à deux conditions, elle engendre une congruence ; et à trois, une surface. Par exemple, toutes les droites qui rencontrent une droite forment un complexe ; toutes celles qui rencontrent deux droites forment une congruence ; toutes les droites qui rencontrent deux droites et sont parallèles à un plan forment une surface.

Ces êtres géométriques nouveaux ont fait l'objet de travaux extrêmement remarquables. Ils ont emprunté leur origine, non seulement à la science du calcul, mais même à la Mécanique, ce qui n'a pas empêché d'en faire une étude purement géométrique.

A ce sujet, il est permis de s'étonner de l'opposition étrange qu'on a souvent tenté d'établir entre le calcul et la Géométrie, entre les méthodes analytiques et les méthodes synthétiques, comme l'on dit parfois d'une façon abusive. L'homme est-il donc si heureusement doué qu'il puisse s'attribuer le droit de dédaigner l'un quelconque des chemins qui peuvent le conduire à la recherche et à la découverte de la vérité ! Nous savons en réalité peu de chose ; mais, en matière de Géométrie, ce peu, qui constitue notre patrimoine scientifique, nous le devons à la fois aux géomètres et aux analystes. L'esprit de généralisation, d'une part, la considération raisonnée des faits en eux-mêmes, de l'autre, ont graduellement amené des progrès et des découvertes nouvelles. La science du calcul et la Géométrie pure se prêtent un mutuel appui ; nulle des deux n'est supérieure ni inférieure à l'autre. Sans le calcul, nous ne serions pas beaucoup plus avancés qu'on ne l'était du temps de Platon ; sans la Géométrie moderne, nous marcherions à la découverte de la vérité à peu près comme un homme qui erre en tâtonnant dans un souterrain, certain de ne pas s'égarer, mais condamné à ne voir la lumière qu'une fois son voyage terminé. Nous devons au calcul des solutions de beaux problèmes, à la Géométrie des méthodes merveilleuses, parfois étonnantes de simplicité, qui seules ont permis certaines découvertes. On a peine à comprendre comment des hommes

de grande valeur ont pu tenter d'établir une sorte de préséance, de hiérarchie au profit de l'un ou de l'autre de ces deux grands moyens généraux, qui progressent surtout par leur aide réciproque.

Les transformations géométriques. — L'idée de transformation des figures était certainement connue des anciens, au moins dans des cas particuliers, mais c'est seulement dans la Géométrie moderne qu'elle a pris la place considérable qu'elle occupe à juste titre. D'une figure (F) quelconque, par des constructions bien nettement définies, on comprend qu'il est possible de déduire une nouvelle figure (F′) et que réciproquement on pourra revenir de la figure (F′) à la figure (F). Or, si une propriété est connue, ou facile à découvrir, dans la figure (F′), il s'ensuit qu'on aura par cela même, dans la figure primitive (F), une propriété qu'il eût peut-être été très difficile d'obtenir par des voies directes. De même pour la résolution d'un problème. On devine quelle puissance d'investigation une telle méthode générale fournit au géomètre, d'autant plus que les transformations sont en nombre illimité, que chaque jour on peut imaginer une transformation nouvelle.

Énumérer seulement les principales transformations générales devenues classiques serait impossible ici. C'est tout au plus si nous pouvons, au courant de la plume, rappeler l'homothétie, la similitude, l'inversion, l'homologie, l'homographie.

Mais il convient de signaler tout particulièrement, en nous bornant aux figures planes, le mode de transformation dans lequel à un point correspond une droite, à une droite un point, et dont Chasles a tiré un si merveilleux parti, en y puisant son *principe de dualité*. C'est là encore qu'on rencontre le germe de toute la belle théorie des polaires réciproques, à laquelle Poncelet a donné de si remarquables développements.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette idée générale des transformations, c'est une démonstration nouvelle de ce fait que la Mathématique ne crée rien et que son rôle est constamment de nous présenter la vérité sous une forme plus accessible qu'elle ne l'était primitivement. Qu'il s'agisse

de calcul ou de Géométrie, il en est toujours de même. Une transformation de figure n'est pas sans analogie avec une transformation d'équation. Dans un cas comme dans l'autre, la proposition à établir ou la solution à obtenir se trouvait masquée d'abord, pénible à découvrir. Grâce à la transformation opérée, cette vérité que nous poursuivons apparaît avec une clarté particulière ; nous l'établissons ou nous la constatons, puis, remontant par transformation inverse à la question primitive, celle-ci se trouve dès lors résolue.

La Géométrie projective. — Parmi les transformations possibles, il en est de particulièrement intéressantes. Ce sont celles qui résultent de la construction effectuée en prenant un point fixe O, le joignant à tous les points M de la figure primitive et en déduisant la position du point M′ de la figure nouvelle, sur la droite OM, par une loi déterminée. La perspective d'une figure plane sur un autre plan, par exemple, est un cas spécial de ces transformations qui jouissent de propriétés fort intéressantes. C'est à l'étude de ces *propriétés projectives* que Poncelet a consacré son principal Ouvrage de Géométrie. Depuis lors, les notions dont il s'agit ont été largement généralisées, surtout entre les mains de MM. Reye et Cremona, et il en est sorti, sous le nom de *Géométrie projective,* une véritable science à part, qui se développe chaque jour davantage et produit de brillants résultats.

La Géométrie cinématique. — Sans empiéter en rien sur les considérations que nous aurons à présenter plus loin sur la science du mouvement, il y a lieu de constater que la Géométrie en elle-même exige en maintes circonstances qu'on fasse intervenir l'étude du déplacement d'une figure. C'est là une question purement géométrique et non mécanique ; la notion des centres et axes instantanés en est un exemple intéressant, et c'est l'un des grands mérites de Chasles d'avoir jeté sur ces théories une clarté frappante, grâce surtout à la simplicité des moyens employés par lui. Mais il y avait un intérêt réel à ne pas laisser ces questions noyées en quelque sorte dans la masse des vérités géométriques. C'est principalement à M. Mannheim que revient l'honneur d'en avoir fait l'objet d'un chapitre à part, sous le

nom de *Géométrie cinématique*. Après avoir apporté lui-même les plus importantes contributions à cette branche de la science, le créateur de la Géométrie cinématique a eu la satisfaction de voir de nombreux disciples suivre la voie tracée par lui, soit en France, soit à l'étranger. Il en est résulté de nombreuses et intéressantes découvertes nouvelles, aussi importantes en elles-mêmes que par l'aide qu'elles apportent à la science du mouvement.

Il nous sera permis de profiter de cette occasion et de cet exemple pour faire ressortir le grand intérêt qu'il y a, tout en respectant la grande unité de la Science, à la diviser en chapitres pour mieux étudier et approfondir certaines catégories de vérités. Ces chapitres ont entre eux des affinités nécessaires, l'étude de l'un réagit sur l'étude de l'autre; mais il n'en est pas moins vrai que cette classification permet de voir beaucoup plus clair dans le chemin que l'on poursuit, et devient par cela même l'origine de découvertes nouvelles qui très probablement, sans ce secours, seraient restées ignorées. C'est à ce point de vue qu'on peut dire sans exagération que la création de la Géométrie cinématique a été un véritable bienfait scientifique.

La Géométrie du triangle. — S'il est une figure, parmi celles que présente la Géométrie, qui ait été étudiée depuis la plus haute antiquité, c'est assurément le triangle, formé par trois points et par les droites qui les joignent. Il pouvait sembler, après tant de travaux antérieurs, que rien dans ce domaine ne restait inconnu. Cependant, en 1873, un mathématicien français, M. Émile Lemoine, publia un petit Mémoire concernant un point remarquable du plan d'un triangle dont on avait constaté séparément de nombreuses propriétés sans remarquer qu'elles s'appliquaient toutes à ce seul point, désormais désigné, avec justice, sous le nom de *point de Lemoine*. Bientôt suivi par un grand nombre de confrères, parmi lesquels il convient de citer surtout MM. H. Brocard et Neuberg, M. Lemoine créa de la sorte une branche géométrique nouvelle, sous le nom de *Géométrie du triangle*, et contribua personnellement au développement de cette partie de la Science par d'incessantes publications. L'étendue prise par la Géométrie du triangle est aujourd'hui

considérable ; on la cultive dans presque tous les pays où la Science mathématique a des représentants, et il serait profondément injuste de méconnaître l'intérêt des nombreux résultats obtenus. Peut-être serait-on en droit de reprocher à cette branche de la Géométrie de s'être un peu égarée à la poursuite des vérités de détail ; mais il est à espérer qu'un jour, prochain peut-être, une sorte de synthèse permettra de donner un corps plus solide à cette doctrine déjà si féconde, et lui apportera ainsi une force nouvelle, destinée à produire des résultats plus complets et plus importants encore.

La Géométrographie. — C'est aussi à M. Émile Lemoine qu'on est redevable de la *Géométrographie,* ou « art des constructions géométriques ». Steiner (et M. Lemoine ne s'en doutait guère quand il jeta les premières bases de la Géométrographie) avait, dans un passage tout récemment mis à jour, attiré l'attention sur le grand intérêt qu'offrirait un moyen méthodique de comparaison entre les diverses constructions qui peuvent permettre d'obtenir avec la règle et le compas un résultat géométrique déterminé. C'est à ce vœu que la Géométrographie donne satisfaction. En remarquant que toute construction, si compliquée soit-elle, est constamment réductible à un certain nombre de constructions élémentaires, toujours de même nature, et en assimilant entre elles, par une hypothèse bien naturelle et justifiable, ces constructions élémentaires de même nature, M. Lemoine est arrivé, par un système simple de notations, à pouvoir analyser une construction géométrique quelconque et à la caractériser par deux nombres, appelés par lui *coefficient de simplicité* et *coefficient d'exactitude*.

Nous ne saurions entrer ici dans aucun détail à ce sujet. Mais nous devons constater que la Géométrographie est, dès à présent, cultivée et même enseignée dans plusieurs pays étrangers, et exprimer le vœu qu'il en soit de même un jour dans sa patrie d'origine.

Les Géométries à *n* dimensions. — Le besoin de généralisation, qui est la caractéristique de l'esprit mathématique, devait conduire certains géomètres à sortir du domaine de

l'espace réel à trois dimensions, dans lequel nous sommes placés, et à se demander quelles pourraient être les propriétés des figures tracées dans les espaces supérieurs dont nous ne pouvons d'ailleurs avoir aucune notion directe ou indirecte. C'est surtout par l'intermédiaire du calcul qu'on est arrivé à s'engager dans cette voie. Une formule déterminée répondant à une figure bien caractérisée de notre espace, on a donné un nom analogue à une figure hypothétique répondant à une formule analogue. Il en est résulté que les Géométries à plus de trois dimensions n'ont guère été qu'un moyen de donner des formes géométriques à des faits algébriques. Peu à peu, cependant, et en poursuivant les analogies, on a reconnu qu'il était possible de raisonner sur ces êtres géométriques supposés, de manière à obtenir des résultats s'appliquant au monde réel, c'est-à-dire, comme toujours, aux abstractions auxquelles ce monde réel nous conduit.

Dans cette mesure, les Géométries à n dimensions ne sont pas sans présenter certains avantages. Elles abrègent le langage, peuvent dispenser de longs calculs, permettre à l'esprit de moins s'égarer dans les symboles. Mais, autant une pareille étude est digne d'intérêt et d'une utilité réelle si on la maintient dans ses limites naturelles, autant elle deviendrait funeste dans le cas où l'on prétendrait lui accorder la réalité qui appartient à l'espace dans lequel nous vivons. Cela ne deviendrait plus qu'un jeu plus ou moins brillant de l'esprit, se mettant au service de rêveries directement contraires au but de la Mathématique.

La Géométrie de situation. — Nous avons indiqué, dans le chapitre premier, cette branche si intéressante de la Mathématique. Elle se rattache à la Géométrie par son titre, à l'analyse des combinaisons, et, par conséquent, à l'Algèbre, par une grande partie des objets qu'elle étudie, à l'Arithmologie par plusieurs de ses conséquences. Enfin, elle rend des services importants dans la Théorie des fonctions et dans les applications géométriques du Calcul infinitésimal. D'éminents auteurs ne craignent pas de s'occuper aujourd'hui de la Géométrie de situation ou *analysis situs*, comme l'ont fait MM. Picard et Simart dans leur *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*

Dans la Géométrie de situation, ce n'est plus la mesure que l'on se propose; on examine les figures ou les objets, au point de vue de leurs positions respectives; ainsi, dans les surfaces, ce sont les ordres de connexion qui constituent l'étude essentielle. Les problèmes si nombreux et généralement si difficiles, concernant les jeux d'échecs, de dominos, de labyrinthes, les figures magiques, etc., appartiennent à la Géométrie de situation. Dans cet ordre d'idées, je ne résiste pas au plaisir de citer un des ouvrages les plus originaux et les plus curieux qui aient été publiés dans ces dernières années, ouvrage d'autant plus intéressant qu'il n'émane pas d'un mathématicien de profession. Je veux parler du livre de M. Gabriel Arnoux : *Arithmétique graphique; les espaces arithmétiques hypermagiques* (1). Il serait surprenant que les idées si profondément nouvelles et fécondes semées dans ce modeste volume n'arrivassent pas un jour à produire d'heureux et brillants résultats dans les questions arithmologiques, lorsqu'un savant, désireux de faire progresser la Théorie des nombres, voudra se décider à en prendre connaissance et à en tirer parti.

---

(1) Un nouveau Volume du même Auteur a été publié récemment sous le titre : *Arithmétique graphique; introduction à l'étude des fonctions arithmétiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

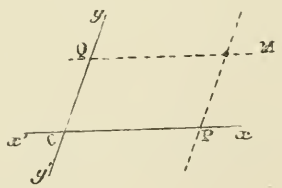
CHAPITRE VII.

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Les coordonnées. — De tout temps, on a fait application du calcul à la Géométrie. Ce n'est donc pas cette application qui caractérise l'immortelle découverte de Descartes, l'inventeur de la Géométrie analytique. Mais il a eu la gloire de donner à cette application un caractère systématique uniforme, et d'établir que toutes les propriétés géométriques pouvaient se traduire par des relations numériques. Pour arriver à un tel résultat, il fallait tout d'abord montrer comment, par des données numériques, il était possible de représenter le point, premier élément essentiel de toute figure, et de fixer ainsi la position d'un point. C'est à quoi l'on arrive par l'établissement des *coordonnées*.

Pour plus de clarté, nous ne parlerons tout d'abord ici que

Fig. 5.



des questions de Géométrie plane, et nous commencerons par définir les coordonnées *rectilignes* ou *cartésiennes*. Si deux droites fixes qui se coupent, X'OX, Y'OY, sont tracées dans le plan dont on considère un point M, si par ce point on mène une parallèle MP à OY, puis une parallèle MQ à OX, ces deux droites couperont respectivement OX et OY en deux points P et Q.

Réciproquement, si l'on connaît le point P sur OX et le point Q sur OY, il suffira, pour obtenir M, de mener par P une parallèle à OY et par Q une parallèle à OX, et de prendre leur intersection. Or, le point P sera complètement déterminé sur OX si l'on se donne le segment OP, ou, ce qui revient au même, la mesure x de ce segment; ce nombre algébrique x pourra être positif ou négatif, suivant que le segment OP devra être porté sur OX dans un sens, OX par exemple, ou dans le sens opposé OX'. De même, le point Q sera déterminé par la mesure y du segment OQ. Les deux nombres x et y sont ce qu'on appelle les deux *coordonnées* du point M, et le système des droites OX, OY est le système des *axes coordonnés*.

Cette définition, sur laquelle nous venons d'insister un peu à cause de l'immense importance qu'elle présente, nous montre, par voie de généralisation, qu'il est possible d'imaginer à l'infini des systèmes de coordonnées d'autre nature. Du moment où la position d'un point M sur un plan sera définie par l'intersection de deux lignes, si chacune de ces lignes est spécifiée par un nombre algébrique, les deux nombres en question seront les coordonnées de M dans un certain système. Pour nous faire clairement comprendre, supposons par exemple que, O étant un point fixe et OZ une droite fixe, on définisse le point M par l'intersection d'une circonférence ayant O pour centre avec une droite issue de ce même point O. La circonférence sera déterminée par la longueur OM, ou n, de son rayon; la droite OM le sera par l'angle ω qu'elle forme avec OZ; r et ω seront ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* du point M.

On ne saurait attribuer une supériorité à un système de coordonnées sur un autre; tout dépend de la nature des questions qui se présentent; et les coordonnées polaires dont nous venons de parler, par exemple, sont d'un grand usage. Mais, dans la majorité des cas, les coordonnées cartésiennes, et notamment les coordonnées *rectangulaires* (on appelle ainsi celles dans lesquelles les deux axes OX, OY sont perpendiculaires l'un sur l'autre) offrent des avantages considérables. Il en est un qu'on peut saisir immédiatement. En coordonnées cartésiennes, les deux coordonnées d'un point M déterminent ce point, et réciproquement la position du point M détermine nettement ses deux coordonnées x et y.

En coordonnées polaires, il n'en est plus tout à fait ainsi. Les deux coordonnées r et ω, c'est-à-dire la distance OM et l'angle ZOM, déterminent bien sans ambiguïté la position du point M ; mais la réciproque n'est plus vraie ; car r et $\omega + 2k\pi$, k étant un nombre entier, donneraient encore le même point M.

Cette uniformité réciproque des coordonnées cartésiennes est une propriété extrêmement importante et précieuse, et suffirait, toutes choses égales d'ailleurs, pour leur assurer la prépondérance générale qu'elles ont dans cette partie de la science.

Équations des lignes; lieux géométriques. — Une ligne étant tracée sur un plan, si l'on considère les coordonnées x, y de chacun des points de cette ligne, il est clair qu'à toute valeur de x correspondront une ou plusieurs valeurs bien déterminées de y ; cette dernière coordonnée étant une fonction de x, en regardant x comme une variable indépendante ; de telle sorte que la relation $y = f(x)$ caractérisera les points de la ligne considérée : on aurait tout aussi bien pu dire que x sera une fonction de y ; et, d'une manière plus générale, la relation entre x et y pourra être supposée écrite sous la forme $F(x, y) = 0$. C'est cette relation qu'on appelle *l'équation* de la ligne ; une ligne étant définie, son équation s'ensuit, et. réciproquement, l'équation d'une ligne étant donnée, on peut en déduire la forme, la position et les propriétés de cette ligne.

Pour préciser, il faut bien remarquer que la définition d'une ligne implique ses propriétés et qu'au point de vue qui nous intéresse, cette définition est nécessaire pour que la ligne ait une existence. Suivant la remarque très juste d'Auguste Comte, toute définition géométrique explicative est une équation de cette ligne dans un certain système de coordonnées, si l'on traduit en symboles numériques la définition dont il s'agit. Pour prendre le plus simple des exemples, cette définition : « la circonférence est une courbe dont tous les points sont à une même distance d'un point fixe appelé centre » donne l'équation $r = a$, en coordonnées polaires, si l'on prend l'origine O au centre et si l'on désigne par a la longueur du rayon.

Il peut être parfois assez difficile d'effectuer cette traduction, mais elle est toujours philosophiquement possible, et il s'ensuit que toute ligne ne peut en réalité être conçue autrement que comme un lieu géométrique. Il y a plus ; c'est que, lorsqu'on a trouvé l'équation, en coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation elle-même n'est en réalité qu'une forme spéciale de la définition de ce lieu géométrique.

Cette identité de la représentation analytique (1) des lignes avec la notion des lieux géométriques est de la plus haute importance. C'est là l'origine de tous les résultats si nombreux et si féconds de la Géométrie analytique ; c'est là aussi qu'il faut chercher le lien étroit et indissoluble qui unit la science du calcul à la science de l'étendue.

Quand on se propose un problème déterminé : « trouver un point qui jouisse de telles ou telles propriétés », si l'on néglige une de ces propriétés, on reconnaîtra que le point doit se trouver sur une ligne, autrement dit qu'il doit appartenir à un certain lieu géométrique dont l'équation est $f(x,y) = 0$. Si l'on fait abstraction, au contraire, d'une autre des propriétés énoncées, le point devra se trouver sur un autre lieu géométrique, ayant pour équation $\varphi(x,y) = 0$. Il devra donc se confondre avec l'un des points communs aux deux lignes en question, et ses coordonnées vérifiant à la fois les deux équations seront obtenues en résolvant le système qu'elles forment à elles deux ; le problème de Géométrie a été ainsi ramené à une question de calcul.

Pour la recherche des lieux géométriques eux-mêmes, la Géométrie analytique nous offre une ressource non moins merveilleuse, à cause de sa généralité. On s'en rendra compte par un exemple simple : supposons qu'il s'agisse de déterminer le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à un point P et à une droite (D) soit égal à $\frac{1}{2}$; M étant l'un des points du lieu cherché, appelons λ la

(1) Le mot « analytique » est appliqué ici pour exprimer l'emploi du calcul, suivant l'usage habituel. C'est dans le même sens qu'il entre dans la désignation de la branche qui nous occupe, la Géométrie analytique. Il faut d'ailleurs reconnaître que la méthode analytique est ici d'un usage tellement constant que l'expression est assez justifiée.

distance MP; la distance de M à (D) sera 2λ. Ainsi M appartient à la circonférence de centre P et de rayon λ; soit $f(x,y,\lambda)=0$ l'équation de cette circonférence; M appartient aussi à une droite parallèle à (D) à une distance 2λ; soit $\varphi(x,y,\lambda)=0$ l'équation de cette droite.

Si l'on vient à éliminer λ entre ces deux équations, on aura une relation qui devra exister nécessairement entre x et y, quelle que soit la valeur attribuée à λ. Ce sera donc précisément l'équation du lieu demandé.

Il est bien facile de reconnaître que le raisonnement présenté sur cet exemple très simple est d'un usage entièrement général.

Transformation des coordonnées; classification des lignes. — Lorsqu'une ligne est rapportée à un système d'axes coordonnés cartésiens OX, OY, elle a une certaine équation $f(x,y)=0$. On peut se proposer de chercher quelle serait son équation si on la rapportait à un autre système O_1X_1, O_1Y_1. La Géométrie analytique résout ce problème en le ramenant à un autre plus simple, et que voici : connaissant les coordonnées x, y d'un point M par rapport à OX, OY, trouver ses coordonnées x_1, y_1, par rapport à O_1X_1, O_1Y_1. On établit que x_1, y_1 s'expriment par des fonctions du premier degré de x_1 y_1 et inversement, et il résulte immédiatement de là que l'équation d'une ligne $f(x,y)=0$, si elle est algébrique, conserve le même degré quand on passe d'un système d'axes coordonnés à un autre système. C'est l'avantage capital et incontestable de la méthode des coordonnées cartésiennes, car elle permet, par cela même, d'établir une classification de toutes les lignes qui ont des équations algébriques, et qu'on appelle *courbes algébriques,* d'après les degrés des équations elles-mêmes. C'est aux lignes qu'on applique désormais le degré, ou l'*ordre,* comme l'on dit plus souvent peut-être. L'unique ligne du premier degré ou du premier ordre est la droite; les lignes du second ordre sont les coniques (ellipse, hyperbole et parabole); et de même pour les lignes algébriques d'ordres plus élevés.

Extension à l'espace. — On comprend aisément que la plupart des notions générales de Géométrie analytique que

nous venons d'indiquer, surtout en ce qui touche la méthode des coordonnées cartésiennes, sont susceptibles d'une extension à la Géométrie de l'espace. Que l'on suppose, en effet, trois axes coordonnés OX, OY, OZ formant un trièdre, et en menant par un point M des plans parallèles aux faces, on obtient sur OX, OY, OZ trois points d'intersection P, Q, R. Les nombres qui mesurent les segments OP, OQ, OR sont les coordonnées de M; les coordonnées d'un point déterminent ce point; et réciproquement la position d'un point entraîne la connaissance de ses coordonnées, le tout sans ambiguïté.

Une équation $f(x, y, z) = 0$ qui lie les trois coordonnées d'un point variable représente une surface; on peut changer d'axes, et l'équation d'une même surface, si cette équation est algébrique, ne change pas de degré lorsque les axes changent, en sorte que les surfaces algébriques peuvent être classées d'après leurs degrés, ou leurs ordres.

En tout ceci, l'analogie est manifeste. Elle l'est tellement, surtout au point de vue du calcul, qu'il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une exposition doctrinale un peu complète de la Géométrie analytique, à présenter l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans l'espace, et en s'élevant tout naturellement d'une notion à l'autre; de rares tentatives ont été timidement faites jusqu'ici dans cet ordre d'idées: nous serions étonné si quelque jour elles ne finissaient pas par produire des résultats efficaces, sous l'influence d'efforts nouveaux et plus énergiques.

Il faut néanmoins reconnaître que certaines notions de la Géométrie analytique de l'espace semblent se refuser, mais plus en apparence qu'en réalité bien souvent, à la poursuite de cette analogie. C'est ainsi qu'une ligne dans l'espace, c'est-à-dire en général une courbe gauche, est représentée par l'ensemble de deux équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, ce qui traduit cette vérité géométrique qu'une ligne est l'intersection de deux surfaces. Mais en tout cas, si la mise en œuvre du calcul peut arriver dans certaines questions à se compliquer et à présenter des difficultés particulières, l'esprit général de la science reste le même; c'est toujours, uniformément, la réduction systématique de toute question

de Géométrie à une question de calcul, qui constitue le but essentiel de la Géométrie analytique ; et ce but, on l'atteint par des moyens analogues, qu'il s'agisse du plan ou de l'espace.

Théorie des courbes planes. — Pour se faire une idée complète de la Géométrie analytique et en apprécier l'immense étendue, il ne faudrait pas restreindre cette science aux éléments qui figurent d'habitude sous ce titre dans l'enseignement. Elle comprend en réalité toutes les applications du calcul, et notamment du Calcul infinitésimal, à la science de l'étendue ; et il est digne de remarque que ce soit précisément l'étude des courbes planes, considérée au point de vue de la recherche des tangentes, qui ait conduit à la création du Calcul infinitésimal. Cette observation confirme bien la grande unité de la Mathématique, dont les diverses branches, tout en se ramifiant à l'infini, arrivent à se souder entre elles et à se prêter un mutuel appui.

L'étude des courbes planes, avec le secours de la Géométrie analytique, de l'Algèbre proprement dite et du Calcul infinitésimal, peut être faite à un double point de vue. Il est possible d'en étudier successivement les propriétés, en commençant par celles d'un degré plus faible pour s'élever de proche en proche, sauf à examiner à part les courbes transcendantes (dont les équations ne sont pas algébriques) ou du moins quelques-unes d'entre elles.

L'autre méthode consiste à remarquer que certaines recherches s'appliquent également d'une façon uniforme à toutes les courbes, soit algébriques, soit transcendantes, et à construire ainsi des théories générales, dont l'application se fera ensuite aux courbes des divers degrés, et sera généralement d'autant plus difficile que le degré sera plus élevé.

La première méthode a prévalu pendant de longues années, et c'est à peine si l'étude ordinaire de la Géométrie analytique avait dépassé les coniques et quelques aperçus concernant les courbes du troisième ordre, jusque vers le quart du XIX^e^ siècle. Mais les travaux plus récents accomplis dans le monde mathématique tout entier ont été marqués par une tendance contraire et plus philosophique. C'est vers la seconde méthode qu'on s'est orienté désormais, se préoccupant

des théories générales beaucoup plus que de l'étude particulière des courbes de tel ou tel degré.

Ce résultat, dont il y a lieu de se féliciter quant aux espérances de progrès futurs qu'il permet de concevoir, a été dû pour une bonne part aux conquêtes de la Géométrie moderne, qui fournissait assez de ressources pour l'étude des coniques et permettait ainsi à la Géométrie analytique de prendre son essor vers des régions plus vastes et plus dignes d'elle.

Nous devons nous borner à mentionner ici quelques-unes des questions qui permettent de constituer autant de chapitres particuliers de la théorie des courbes planes. L'une des plus importantes, et qui appelle surtout l'Algèbre à son aide, est celle de la détermination d'une courbe par un certain nombre de points. Très simple dans les cas ordinaires, le problème se complique et présente de réelles difficultés, qui ne sont pas toutes aplanies, lorsque l'on considère les points particuliers qui offrent des singularités, en particulier les points multiples, d'inflexion, de rebroussement, etc. Le principe de dualité rattache à cette question celle de la détermination d'une courbe par des tangentes, et conduit à la notion de la *classe* d'une courbe (nombre de tangentes qui peuvent en général lui être menées par un point quelconque).

Ce simple aperçu montre que déjà les tangentes interviennent dans ces premières questions particulières ; la théorie des tangentes est donc, comme l'on devait s'y attendre, l'une de celles qui joueront ici le rôle le plus important. Les normales et les asymptotes s'y rattachent assez étroitement. Ces considérations appliquées aux coniques conduisent aux propriétés des pôles et des polaires ; et l'analogie permet d'étendre ces propriétés aux courbes d'ordres supérieurs.

Il y a lieu de citer aussi l'étude de la courbure, des courbes osculatrices, des contacts de divers ordres, celle des enveloppes d'une courbe variable, des développées et développantes ; les diamètres, les axes, les centres sont encore autant de chapitres de la Géométrie analytique.

Enfin, la détermination des aires des courbes et des longueurs de leurs arcs, relevant du Calcul intégral, rentre également dans ces généralités dont l'application peut ensuite être faite à toute courbe particulière.

Cette énumération, nécessairement incomplète, présenterait la plus grave des lacunes si nous ne signalions l'importance de l'étude générale des transformations faite au point de vue de la Géométrie analytique. En particulier, les transformations spéciales qui donnent lieu aux polaires, aux caustiques, aux conchoïdes, aux courbes parallèles, présentent un intérêt tout à fait général.

Théorie des surfaces. — L'étude de la Géométrie analytique prend une extension bien plus grande encore quand on en considère l'application aux figures de l'espace. La théorie des surfaces, comprenant bien entendu les courbes gauches, représente aujourd'hui un incomparable monument scientifique. On ne peut l'approfondir d'une façon un peu complète que par une connaissance des propriétés des équations différentielles, et nous voyons encore ici le Calcul intégral, la Théorie des fonctions, la Géométrie pure se fusionner pour contribuer au progrès de la Géométrie analytique. Moins encore ici que dans ce qui précède, nous ne serions en état de fournir une nomenclature tant soit peu complète des sujets qu'embrasse la théorie des surfaces. On comprend seulement que des éléments analogues à ceux des courbes planes interviennent dans l'étude des lignes gauches. Il s'en introduit de nouveaux, comme par exemple le plan osculateur et la torsion. Une courbe gauche pouvant être considérée comme placée sur une surface, celles de ces courbes tracées sur une surface simple formeront une classe qui pourra présenter des propriétés remarquables; c'est ainsi que les courbes sphériques ont fait l'objet de très intéressants travaux; plus généralement on a fait une étude, sous le nom de *Géométrie sphérique*, des figures quelconques tracées sur la surface d'une sphère.

Quant aux surfaces en général, en dehors de leur degré, si elles sont algébriques, elles sont souvent envisagées au point de vue de leur génération géométrique. Les surfaces réglées, par exemple, sont celles engendrées par une ligne droite; parmi elles, on distingue les surfaces développables, qui peuvent par déformation s'étendre sur un plan; le cylindre et le cône en sont des cas très particuliers; les autres sont des surfaces gauches. D'une manière plus générale, on

a abordé le problème, d'ailleurs très difficile, des surfaces applicables sur d'autres surfaces.

L'étude de la courbure autour d'un point joue dans cette théorie un rôle considérable ; on comprend combien la notion de courbure se complique alors puisqu'il s'agit des courbures de toutes les différentes lignes qui peuvent être tracées sur la surface par le point considéré. On est cependant arrivé, dans cet ordre de recherches, à des résultats remarquables. Cela a conduit à la notion des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des lignes géodésiques. Pour ces diverses études, les géomètres font un grand usage des coordonnées curvilignes, que nous ne saurions définir ici, mais qui semblent constituer l'un des plus hauts degrés de généralisation auxquels l'idée fondamentale de Descartes puisse être soumise. Toute une classe remarquable, celle des surfaces minima, a été particulièrement étudiée, surtout dans ces dernières années; et, bien que le champ des découvertes soit encore indéfiniment ouvert, on ne peut se défendre d'admiration devant le nombre et l'importance des vérités acquises en un temps relativement restreint.

Ce qu'il y a de remarquable dans ces recherches récentes, c'est qu'elles s'appuient tout à la fois sur la Géométrie, l'Algèbre, le Calcul infinitésimal, la Théorie des fonctions, et même souvent sur la Mécanique. Réciproquement, les propriétés des surfaces ainsi découvertes réagissent de la façon la plus heureuse sur les progrès des sciences auxquelles ont été faits les emprunts. La Géométrie analytique, au degré de généralité qu'elle a atteint, reçoit ainsi de toutes parts la contribution des autres branches de la Mathématique, et rend avec usure les bienfaits qu'elle a reçus. Sans l'intervention des idées géométriques, pour ne citer qu'un exemple déjà ancien, la théorie des équations aux dérivées partielles n'aurait fait aucun progrès ; et l'on se demande même si le problème se serait posé.

Bien que nous soyons en général très systématiquement réservé en fait d'indications bibliographiques, il nous semble impossible de clôturer ce paragraphe sur la théorie des surfaces sans signaler l'œuvre si considérable de M. Gaston Darboux, dans laquelle sont résumés les travaux les plus intéressants relatifs à ce sujet : *Leçons sur la théorie des*

surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.

Coordonnées trilinéaires et tétraédriques ; coordonnées tangentielles — Nous avons vu qu'on peut imaginer à l'infini des systèmes de coordonnées. Parmi eux, il en est un dont l'usage est tellement répandu et souvent si utile qu'il mérite ici une mention spéciale.

Si l'on prend un triangle ABC et un point M dans son plan, on peut considérer les distances α, β, γ de ce point aux trois côtés du triangle, ou encore les nombres α', β', γ' qui mesurent trois poids placés en A, B, C et dont M serait le centre de gravité. Trois nombres quelconques proportionnels à α, β, γ ou à α', β', γ' sont ce qu'on appelle les *coordonnées trilinéaires* de ce point M par rapport au *triangle de référence* ABC. Dans le premier cas, on a des *coordonnées normales ;* dans le second, des *coordonnées barycentriques.* Ces coordonnées trilinéaires sont toujours homogènes ; c'est-à-dire qu'on peut remplacer les coordonnées par des nombres proportionnels quelconques ; et les équations de lignes qu'on obtient sont toujours homogènes, et du même degré qu'en coordonnées cartésiennes. On peut d'ailleurs se servir d'autant de systèmes de coordonnées trilinéaires qu'on voudra, en plus des deux qui précèdent.

On pressent l'analogie et l'extension possible à l'espace, en prenant un *tétraèdre de référence* ABCD au lieu d'un triangle. S'il s'agit par exemple de coordonnées barycentriques, α, β, γ, δ (ou des nombres proportionnels) seront les coordonnées du point M, si M est le centre de gravité des quatre poids α, β, γ, δ placés en A, B, C, D. Ces coordonnées tétraédriques rendent de grands services dans beaucoup de questions, de même que les coordonnées trilinéaires pour le plan, en simplifiant les calculs et leur donnant une plus grande symétrie.

On a été conduit aussi, et surtout par l'application des coordonnées homogènes que nous venons d'indiquer, à l'emploi des *coordonnées tangentielles.* Celles-ci résultent de l'introduction du principe de dualité. Si dans le plan, par exemple, $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ représente une certaine droite, les valeurs u, v, w caractérisant cette droite seront dites les

coordonnées tangentielles de la droite en question. On établit alors qu'un point est représenté par une équation du premier degré.

Dans l'espace, les coordonnées u, v, w, s sont celles d'*un plan*. Un point est représenté par une équation du premier degré. Une droite est déterminée par les coordonnées de deux plans passant par cette droite, ou bien par les équations de deux points qui lui appartiennent. Ces diverses coordonnées, si l'on en possède un peu le maniement, sont du secours le plus précieux dans bien des cas, et elles ont le très grand mérite d'établir un lien moins indirect que les méthodes habituelles entre les symboles algébriques employés et les faits géométriques auxquels ces symboles correspondent.

Le Calcul géométrique. — Malgré les résultats considérables que l'on doit à la conception de Descartes et à l'usage des coordonnées généralisées sous mille formes, il est permis de se demander si, parvenue au point où elle en est aujourd'hui, la Géométrie analytique n'aurait pas avantage à emprunter un autre secours.

Nous avons déjà signalé, au point de vue algébrique, l'intérêt que présente la méthode des équipollences en ce qui concerne les faits de la Géométrie plane, celle des quaternions pour ceux de l'espace, et la méthode de Grassmann. D'une façon plus générale encore, tout système dans lequel les éléments géométriques seront représentés directement par des symboles susceptibles d'être combinés suivant les règles d'une Algèbre précise constituera un *Calcul géométrique*.

Qu'il s'agisse d'un Calcul géométrique déjà connu, ou à découvrir, on comprend les avantages qui s'ensuivent, et qui n'excluent d'ailleurs en rien l'emploi des coordonnées dans certains cas spéciaux. Cette relation directe entre les formules et les faits à étudier est un grand soulagement pour l'esprit et apporte de la clarté ; car souvent l'appareil du calcul cache la vérité essentielle que ce calcul contient sous une forme nuageuse. La simplification dans les écritures est aussi un bienfait fort appréciable. Mais il y a plus encore ; l'Algèbre systématiquement appliquée par la voie des coordonnées, manque de souplesse et ne se prête pas à des

nuances géométriques qui ont cependant leur importance ; il s'ensuit qu'on peut arriver à des résultats, sinon faux, du moins imparfaits; à cette imperfection, un calcul géométrique bien établi portera remède, parce qu'il aura tiré ses principes essentiels de la Géométrie elle-même.

Pour éclaircir cette idée par un simple exemple, on sait qu'en coordonnées rectangulaires l'équation $x^2 + y^2 = 1$ représente une circonférence, et $x^2 - y^2 = 1$ une hyperbole équilatère.

On dira encore que ces équations sont équivalentes à celles-ci :

$$(1) \qquad y = \sqrt{1 - x^2},$$

$$(1') \qquad y = \sqrt{x^2 - 1},$$

et aussi aux deux systèmes :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$$

$$(2') \qquad \begin{cases} x = \operatorname{Ch} t, \\ y = \operatorname{Sh} t, \end{cases}$$

t étant un certain paramètre dont l'élimination conduit en effet aux équations primitives.

Or, l'équation (1) donne bien réellement tous les points de la circonférence si l'on fait varier x de -2 à $+1$; l'équation (1') donne tous les points de l'hyperbole si x varie de $-\infty$ à -1 ou de 1 à $+\infty$. Chacun des points est obtenu *une seule fois,* et l'on cesse de rien obtenir si l'on sort des limites indiquées.

Au contraire, le système (2), quand nous faisons varier t de $-\infty$ à $+\infty$, nous donnera *une infinité de fois* la même circonférence. Et quant au système (2') dans les mêmes conditions, il ne fournira que *la moitié* de l'hyperbole, c'est-à-dire l'une de ses branches seulement.

On voit combien des calculs algébriques pareils, ou semblant tels, peuvent répondre à des faits géométriques essentiellement divers, et quels services pourrait rendre le calcul géométrique en faisant disparaître de telles confusions. Les équipollences, en effet, dans les exemples que

nous venons de citer, dissipent avec la plus grande facilité ces obscurités tant soit peu paradoxales.

La représentation analytique des figures est un chapitre de la science auquel on n'a peut-être pas jusqu'ici apporté tout le soin attentif qu'il faudrait ; et le Calcul géométrique seul rendra possible une œuvre de cette nature.

L'Introduction des imaginaires en Géométrie analytique. — La nécessité d'interpréter les résultats de l'Algèbre a conduit depuis longtemps à introduire en Géométrie analytique des figures imaginaires, auxquelles on prête une réalité, sans qu'elles aient aucun caractère objectif. Sur ces figures on raisonne comme si elles existaient réellement, et cela n'a rien que de très licite; mais il faut bien reconnaître, là encore, qu'on ne fait guère autre chose qu'énoncer des vérités d'ordre algébrique en les habillant d'une autre manière. Quand, par exemple, on dit qu'une droite extérieure à un cercle le coupe en deux points (imaginaires), quand on parle d'une droite (isotrope) qui, en chacun de ses points, est perpendiculaire à elle-même; d'un foyer, qui n'est autre chose qu'un cercle de rayon nul doublement tangent à une conique, toutes ces formes de langage sont faites pour surprendre celui qui en ignorerait l'origine purement algébrique ; et elles ne prennent une valeur géométrique que par extension, et aussi parce qu'elles peuvent conduire à d'utiles résultats.

Il est un autre mode d'introduction systématique des imaginaires sur lequel un certain nombre de tentatives intéressantes ont porté, sans que jusqu'ici on semble être parvenu à un résultat définitif et décisif. Nous voulons parler de l'emploi de ces symboles imaginaires en coordonnées cartésiennes, lorsqu'on les substitue aux coordonnées elles-mêmes. En d'autres termes, que deviendra géométriquement le point de coordonnées (x, y) ou (x, y, z) lorsqu'on donnera à x, y, z des valeurs imaginaires? Comment à ces éléments nouveaux, à ces *points* de coordonnées imaginaires, s'appliqueront les calculs de la Géométrie analytique, et que produiront-ils ?

Parmi les auteurs qui se sont occupés de cette question d'un haut intérêt, on peut citer surtout Laguerre, Marie,

MM. Mouchot et G. Tarry. La question a été assez avancée en ce qui concerne la Géométrie plane ; mais il reste encore une lacune considérable, car la Géométrie à trois dimensions ne se prête pas, ou du moins se prête incomplètement aux conceptions mises en avant jusqu'ici. Le jour où un tel problème aura été définitivement résolu sera celui d'un grand progrès accompli en Géométrie analytique.

CHAPITRE VIII.

LA MÉCANIQUE RATIONNELLE (1).

Définition et objet de la Mécanique. — On définit généralement la Mécanique : « la Science du mouvement et des causes qui le produisent ». Mieux vaudrait s'en tenir à la première partie, car sur les causes nous ne savons rien; ou plutôt, nous donnons le nom de *causes* à des entités et à des locutions forgées par notre cerveau. Du reste, dans toutes les sciences expérimentales, le même fait se produit; le progrès ne consiste pas à chercher à proprement parler la cause d'un phénomène, mais à découvrir les lois qui le régissent, et surtout, par l'application de ces lois, à le faire rentrer dans un phénomène plus général, dont il devient une simple conséquence à titre de cas particulier.

Dans l'échelle générale des sciences, la Mécanique occupe un rang tout particulier, dont elle tire sa haute importance philosophique. Placée aux confins des sciences dites *exactes* et des sciences *physiques,* elle participe à la fois des unes et des autres ; il s'ensuit que, suivant les prédispositions personnelles de chacun, on arrive à attribuer à cette science des caractères différents et même contradictoires. Si l'on s'est bien pénétré cependant de la vérité sur laquelle nous avons tant insisté dans ce qui précède, à savoir que toutes les sciences sont expérimentales, on reconnaîtra qu'il n'y a plus à déterminer qu'une question de degré, et que cette détermination devient chose relativement facile.

L'observation préalable du monde extérieur, toujours indispensable, fournit à la Science mathématique pure, telle

(1) Une grande partie des réflexions contenues dans ce chapitre sont extraites d'un article sur le même sujet, publié dans la *Grande Encyclopédie.* (*Voir* t. XXIII, p. 484.)

que nous l'avons considérée jusqu'ici, un petit nombre de vérités fondamentales, desquelles un système purement logique et rigoureusement établi permettra de déduire un nombre incalculable de conséquences.

Dans les sciences physiques, au contraire, l'expérience et l'observation doivent être perpétuellement en jeu ; elles provoquent la recherche de lois nouvelles, et, une fois ces lois découvertes, elles en prouvent l'exactitude et en établissent la vérification.

En Mécanique, il y a une situation intermédiaire. Aucun axiome fondamental n'est directement fourni par l'observation de la nature, et cependant l'expérience n'est pas appelée à une vérification permanente, pour le moins inutile. Au lieu d'axiomes (et tout en s'emparant de tous ceux qui concernent la Science des grandeurs et celle de l'étendue) la Mécanique part de principes fondamentaux. Ces principes, nullement évidents par eux-mêmes, sont des vérités qui résultent à la fois de la contemplation raisonnée des phénomènes du monde extérieur et d'une longue suite d'opérations logiques. Les principes de la Mécanique sont donc le résultat d'une synthèse profonde, dont seuls ont été capables quelques génies exceptionnels.

Ces principes établis et formulés prennent un caractère de propositions mathématiques; par leur forme même, en effet, ils montrent que l'abstraction préalable et indispensable a déjà été effectuée ; nous reviendrons du reste sur ce point d'une extrême importance. Dès lors, la Mécanique rationnelle est en possession des éléments nécessaires à la constitution de toute science mathématique. Nous disons *Mécanique rationnelle,* parce qu'elle ne s'occupe que d'abstractions, d'êtres de raison, parce que le passage du concret à l'abstrait a été effectué déjà, et parce que le retour ultérieur de l'abstrait au concret sera du domaine de la *Mécanique appliquée.*

Nulle part, peut-être, ce passage et ce retour ne sont plus délicats : et cependant, nulle part on ne trouve les résultats de la Science pure plus utiles et plus précieux quand on en vient aux applications. L'explication de cet apparent paradoxe tient à ce que les abstractions sont assez rapprochées de la nature pour représenter la vérité des faits avec une approximation suffisante; et que, cependant, elles s'en éloi-

gnent assez pour avoir pu éliminer totalement les causes de complications qui eussent rendu l'étude des phénomènes scientifiquement impossible.

Introduction du temps ; la Cinématique. — Le mouvement s'impose en Géométrie ; sans la notion du déplacement des figures, il n'y a plus de Science de l'étendue. Mais les mouvements en Mécanique se distinguent de ceux considérés en Géométrie, par l'introduction d'une grandeur nouvelle, le *temps,* dont nous avons tous la notion et qui est indéfinissable par nature. Seulement, comme cette notion est intimement liée à l'ordre de succession des phénomènes, et que nous ne pouvons même la posséder autrement que par cette considération, il s'ensuit que nous sommes en état d'apprécier des temps égaux, employés à l'accomplissement de phénomènes identiques, que nous savons aussi ce que c'est que la somme de deux temps ; dès lors, cette grandeur, nous pouvons la mesurer, la traduire en nombres et la soumettre au calcul.

Il est donc possible ainsi, comme l'a remarqué Ampère, de faire l'étude des mouvements, en y introduisant la notion du temps, mais sans se préoccuper en aucune manière des causes qui produisent les mouvements que l'on considère. A cette branche de la science a été donné le nom de *Cinematique;* elle comprend l'étude des mouvements des points, et, en général, des figures géométriques quelconques ; elle considère aussi des éléments nouveaux, tels que les vitesses et les accélérations, dont on ne s'occupe pas en Géométrie.

On a beaucoup discuté depuis près d'un siècle, et surtout au point de vue de l'enseignement, pour savoir quel rang la Cinématique devait occuper dans la Mécanique rationnelle. La vérité, c'est que cette Science n'appartient pas directement à la Mécanique. Elle forme, non pas un chapitre à part, mais une introduction indispensable, et voici, ce me semble, quelles sont les considérations décisives à l'appui de cette manière de voir.

La Cinématique ne fait appel à aucun des principes généraux de la Mécanique : c'est une Science mathématique pure dans toute la force du terme. Elle emprunte au monde extérieur les mêmes données premières que la Géométrie ; elle y

ajoute la connaissance du temps, comme nous venons de le dire ; mais une fois ces éléments traduits en nombres ou en figures, c'est-à-dire tombés dans le domaine de l'abstraction, elle poursuit sa marche logique sans aucun emprunt supplémentaire direct ou indirect à l'expérience et à l'observation.

Il y a plus ; en se plaçant au point de vue des tendances modernes de la Géométrie analytique, on y pourrait faire rentrer la Cinématique de toutes pièces. Il est fréquent, en effet, qu'on étudie les déplacements géométriques qui dépendent d'un paramètre réel. Que l'on considère ce paramètre, nombre abstrait par nature, comme représentant le temps, et l'étude cinématique se trouve effectuée. Nous ne voulons pas dire que cette méthode doive être suivie en réalité, qu'on le remarque bien. La Cinématique correspond à un ordre d'idées trop important et nouveau, elle touche à trop de questions dont l'intérêt géométrique est secondaire, pour ne pas mériter une place spéciale dans l'ensemble de la Mathématique, soit au point de vue de la classification générale, soit à celui de l'enseignement.

Mais cette place, nous y insistons, est celle que nous venons d'indiquer ; entre la Géométrie et la Mécanique rationnelle, l'étude mathématique des mouvements dans le temps et dans l'espace est un complément de la première et une préparation à la seconde. Il est juste de reconnaître qu'après bien des hésitations et des tâtonnements, les savants français semblent aujourd'hui entrer résolument dans cette voie, et que la Cinématique tend à prendre de plus en plus le caractère d'une science ayant sa doctrine, son autonomie et ses moyens propres de recherches.

Le point matériel. — La première des abstractions de la Mécanique consiste dans la considération d'un élément indispensable à la constitution mathématique de la science, mais qui demande une courte explication, à cause du côté paradoxal et un peu arbitraire que cette conception présente en apparence.

Toute portion de matière, si faible qu'elle soit, fût-elle réduite à un atome, occupe une certaine portion de l'espace. Cependant, la Mécanique envisage un point, analogue au

point de la Géométrie, c'est-à-dire dépourvu de toutes dimensions, et en lequel on suppose concentrée une certaine quantité de matière. Rien n'oblige même à admettre que cette quantité soit faible; on la prend à volonté, selon les besoins de la question, et l'on considère ce point géométrique comme jouissant des propriétés qui appartiennent à la matière au point de vue mécanique. C'est à cet élément qu'on a donné le nom de *point matériel*. Ici l'abstraction est poussée à ses dernières limites; elle n'en est pas moins précieuse pour cela; mais, encore une fois, il faut un peu de réflexion pour en reconnaître les bienfaits, et pour ne pas trouver qu'il y a une contradiction avec les faits de la nature. L'idée d'un point géométrique ayant autant de matière que mille tonnes, ou même que le soleil, par exemple, surprend un peu. Mais, si l'on réfléchit bien, on verra qu'il n'y a rien là-dedans qui soit plus contraire à la nature des choses que le point géométrique lui-même, la ligne droite, et en général les autres abstractions dont s'empare la Mathématique. C'est donc sur les points matériels que raisonnera constamment la Mécanique, et les corps qu'elle étudiera au point de vue des mouvements devront être considérés comme des ensembles de points matériels.

L'inertie et les forces. — L'une des hypothèses nécessaires à la constitution de la Mécanique, bien qu'elle soit également en contradiction avec le spectacle que nous offre le monde extérieur, est celle du repos absolu, qui permet, par l'établissement d'un système fixe d'axes coordonnés, de juger des mouvements des points matériels. Cette hypothèse admise, le principe fondamental de la Mécanique est celui de l'*inertie;* on l'énonce, en général, sous cette forme :

1° Un point matériel au repos restera au repos s'il n'est soumis à aucune action extérieure ; 2° Si un point matériel se meut uniformément en ligne droite, il continuera ce même mouvement tant qu'il ne sera soumis à aucune action extérieure ;

Et on le complète en disant :

« Toute cause extérieure de mouvement ou de modification de mouvement d'un point matériel est une force. »

On a souvent aussi traduit le principe de l'inertie sous la

forme suivante, qui est moins précise, mais qui rend mieux compte de la dénomination d'*inertie* : « La matière ne saurait par elle-même être une cause de mouvement ou de modification de mouvement. »

En réalité, ce prétendu principe est plutôt une hypothèse et renferme une définition. La vérité, c'est que la matière, sous ses divers aspects, semble douée, au point de vue mécanique, d'une incontestable activité. Mais, comme l'analyse de cette activité semble impossible, et jusqu'ici sans objet, on dit, *supposant* la matière inerte : « Chaque fois qu'un point matériel vient à se mouvoir ou à modifier son mouvement, nous admettons que ce phénomène tient à une cause *extérieure ;* cette cause, sans en préjuger la nature, nous l'appelons une *force*. »

Le grand mérite de cette entité nouvelle, la force, est de faire rentrer dans un même domaine, accessible au calcul, l'infinité des causes directes de modifications de mouvements que nous présente la nature. Ce seront des poids, des actions musculaires, des attractions électriques ou magnétiques, etc. La Mécanique ne s'inquiétera jamais de l'origine ; à ses yeux, toutes ces actions diverses seront des forces, et rien de plus.

Cette notion de la force une fois admise, il arrive, comme pour toutes les grandeurs mathématiques, qu'on peut la mesurer. Il faut, pour cela, comparer les forces par les effets mêmes qu'elles produisent, c'est-à-dire par les vitesses qu'elles communiqueraient à un point matériel partant du repos, ou, ce qui revient au même, par les accélérations du point matériel auquel elles sont successivement appliquées.

La masse. — La mesure des forces, si l'on considérait toujours un seul point matériel, serait si simple que la notion de la force coïnciderait purement et simplement avec celle de l'accélération. Mais l'observation indirecte permet de constater qu'une même force, appliquée à plusieurs points matériels différents, ne produit pas des accélérations pareilles. Il y a donc une propriété mécanique particulière à chaque point matériel, lui étant intimement liée ; cet élément, qui appartient à la matière, est ce qu'on appelle la *masse*. Et ayant constaté cette loi, que le quotient du nombre qui mesure la

force par celui qui mesure l'accélération produite, reste constant pour un même point matériel, quand on lui applique des forces différentes, on en vient à donner de la masse d'un point matériel cette définition d'ailleurs vicieuse dans sa forme trop concise, que c'est le quotient de la force par l'accélération.

La masse, en réalité, est un élément mesurable, inhérent à la matière, et qu'il faut accepter franchement. Il est même préférable d'en faire le point de départ de la Mécanique, de manière à définir ensuite la force comme proportionnelle à la masse et à l'accélération, plutôt que de partir de la force pour arriver à la notion de masse.

Cette distinction a son importance, parce qu'on juge, surtout en pratique, des forces par la comparaison avec les poids. Or, un objet pesant un kilogramme à Paris, par exemple, n'aura pas le même poids à l'équateur, non plus qu'au pôle. Dans le premier cas, il pèsera moins, et plus dans le second. La masse de cet objet, au contraire, ne subit aucune atteinte quand on le transporte où l'on voudra. Il y a donc un intérêt scientifique à partir d'une notion rigoureusement constante comme base fondamentale, c'est-à-dire à s'élever de la notion de masse à la notion de force.

Les unités en Mécanique. — En Géométrie, une seule grandeur concrète intervient, la *longueur,* car on sait que les aires sont des produits de deux longueurs, ou des grandeurs à deux dimensions, les volumes des produits de trois longueurs, ou des grandeurs à trois dimensions ; que les angles sont des rapports de longueur, etc. En Mécanique, nous venons de voir qu'il s'introduit deux grandeurs essentiellement nouvelles, le *temps* et la *masse,* irréductibles par nature, soit entre elles, soit avec les longueurs. Il s'ensuit qu'on est conduit à adopter des unités, d'ailleurs arbitraires, pour mesurer les longueurs, les temps et les masses. Mais une fois ces trois unités fixées, tout en découlera, chacune des autres entités de la Mécanique étant rattachée à ces trois éléments fondamentaux : longueur, temps, masse. C'est ce qu'exprime le Tableau suivant, où les symboles L, T, M figurent la longueur, le temps et la masse, et où les exposants représentent les *dimensions* relativement à chacun de

ces trois éléments, par extension avec ce qui a lieu en Géométrie :

Longueur	L^1	T^0	M^0
Aire	L^2	T^0	M^0
Volume	L^3	T^0	M^0
Vitesse	L^1	T^{-1}	M^0
Accélération	L^1	T^{-2}	M^0
Force	L^1	T^{-2}	M^1

Nous nous bornons à ce petit nombre d'exemples ; mais cela s'étendrait à la force vive, au travail et à tout le reste.

On comprend donc l'importance de l'établissement définitif des trois unités fondamentales ; le système C. G. S., qui est à peu près universellement adopté aujourd'hui, du moins pour les questions de Physique mathématique, consiste, comme l'indiquent ces initiales, à prendre pour unité de longueur le centimètre, pour unité de masse la masse d'un centimètre cube d'eau distillée dans des conditions de température et de pression déterminées, c'est-à-dire le gramme-masse, et pour unité de temps la seconde sexagésimale de temps moyen.

Cette indication très sommaire ne nous a pas semblé être inutile dans un aperçu général, car les questions d'unités sont souvent en Mécanique et en Physique la source de bien des difficultés, quand on n'est pas en possession des notions primordiales, cependant très simples.

La Statique. — Il peut arriver que, sous l'action d'un système de forces, un ensemble de points matériels au repos reste au repos. On dit alors que ces forces se font équilibre, ou que le système est en équilibre.

Sous le prétexte que le repos est plus simple que le mouvement, on a souvent proclamé, et quelques personnes proclament encore aujourd'hui que c'est par cette étude de l'équilibre qu'il convient d'aborder la Mécanique. C'est cette branche de la Mathématique à laquelle on a donné le nom de *Statique*. Telle qu'elle est habituellement constituée, du moins dans ses éléments, la Statique comprend l'étude de l'équilibre d'un point matériel et d'un solide invariable.

Nous croyons, comme pour la Cinématique, que le chapitre de la Statique ainsi comprise doit être soigneusement déta-

ché de la Mécanique rationnelle, dans laquelle il ne peut jeter que trouble et confusion.

Tout d'abord, il paraît assez étrange, après avoir appelé, par définition, force une cause de mouvement, de n'étudier les forces que dans les cas où elles ne produisent aucun mouvement. D'un autre côté, le solide invariable, nouvelle abstraction mécanique qui n'existe pas dans la nature, repose sur une suite d'hypothèses faites sur les solides de la nature et représentant un cas particulier des systèmes matériels. Enfin, la Statique ainsi comprise oblige à une mesure directe des forces, dont la concordance avec les notions de la Mécanique rationnelle est loin d'apparaître directement.

Pour toutes ces raisons, nous estimons qu'il y a lieu de faire de la Statique, dont certaines parties présentent le plus réel intérêt mathématique, un chapitre complémentaire spécial de la Géométrie, sans aucune attache directe avec la Mécanique, qui en est complètement distincte.

Il suffit, pour cela, de désigner provisoirement par force un segment de droite de l'espace, ayant une origine et une extrémité bien définies, et qui peut être transporté tout d'une pièce le long de la droite illimitée sur laquelle il est placé (1). L'origine de ce segment sera le point d'application, la longueur sera la grandeur de la force, et, en partant de là, on pourra non seulement édifier toute la Statique élémentaire, mais encore y ajouter ces notions si intéressantes aujourd'hui éparses et qui mériteraient si bien de former un corps de doctrine, comme l'a fait observer M. Haton de la Goupillière, sous le nom de *Géométrie des masses;* elles comprennent notamment les centres de gravité et les moments d'inertie.

Le jour où l'on se serait ainsi décidé à faire de la Statique un chapitre de Géométrie pure complémentaire, c'est-à-dire une science exclusivement mathématique, n'empruntant aucune notion à la constitution intime des corps, il deviendrait indispensable d'en proscrire les démonstrations de propositions indémontrables, comme celle du parallélogramme des forces, qui ne repose que sur un amoncellement de

(1) Il est utile de remarquer que cette dernière hypothèse exclut l'étude de la stabilité.

sophismes, et dont la vérité, en Mécanique, provient d'un principe fondamental révélé indirectement comme les autres par l'observation. En Statique, il faudrait, par définition et non autrement, appeler *résultante* de deux forces ayant même point d'application la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

La Statique géométrique, ainsi présentée, et dégagée de toutes les considérations mécaniques qui la dénaturent et l'obscurcissent, serait une préparation utile, mais non pas indispensable, à la Mécanique rationnelle, et, lorsqu'on aborderait celle-ci, il ne serait pas difficile de voir la coïncidence entre les forces qu'on y étudie et les êtres de raison purement géométriques désignés antérieurement sous le même nom.

La Dynamique. — La Dynamique est l'étude du mouvement sous l'action des forces. C'est en elle que se concentre en réalité toute la Mécanique rationnelle. Elle se divise tout naturellement en deux parties : Dynamique du point matériel, Dynamique des systèmes.

Avant de dire quelques mots de chacun de ces sujets, qu'il nous soit permis de présenter une observation d'ensemble. La Mécanique se sert de la Mathématique tout entière, de la Géométrie et du Calcul. Mais elle n'est en elle-même ni une science de calcul, ni une science géométrique, malgré son caractère de rationalité. La tendance manifestée par des auteurs assez nombreux, et qui consiste à y chercher l'occasion de problèmes de calcul ou de Géométrie, est donc profondément regrettable, même quand ces auteurs y apportent le plus de talent. Cette science présente assez de difficultés par elle-même, son objet est trop important pour qu'elle s'égare dans des questions latérales et perde ainsi le bénéfice de la situation unique qu'elle occupe dans l'échelle générale des connaissances humaines. Plus on avancera, et plus on arrivera à reconnaître la nécessité de ne pas abandonner un domaine où les progrès purement philosophiques trouvent leur compte, en même temps que les applications pratiques reçoivent également satisfaction.

La Dynamique du point matériel. — L'étude préalable de

la Cinématique permet de donner à ce chapitre de la Mécanique un développement modéré, sans qu'il cesse de former un corps de doctrine bien complet. Après un exposé des principes généraux les plus essentiels et l'introduction de la notion de la masse et de celle de la force, la Dynamique du point matériel se déroule avec une précision et une netteté totales. L'introduction des vecteurs, d'ailleurs pour ainsi dire indispensable en Cinématique, serait de nature à apporter encore ici des simplifications et des clartés nouvelles.

Dans cette étude prennent place : les théorèmes généraux, la théorie des forces centrales, le mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre, et aussi l'étude si importante des mouvements relatifs.

La Dynamique des systèmes. — Autant nous nous sommes élevé contre l'introduction parasite des éléments de Statique dans la Mécanique, autant nous croyons qu'il est utile, pour un exposé méthodique des principes de la Mécanique, de débuter ici par l'étude de l'équilibre, qui se fait à un tout autre point de vue et qui est dominée par le beau théorème du travail virtuel, de Lagrange. On y trouve l'avantage d'une grande unité et d'une simplification des notions qu'on est appelé ensuite à examiner.

Les systèmes libres étant ensuite étudiés au point de vue du mouvement, lorsqu'on aborde les systèmes à liaisons, le principe de d'Alembert vient projeter comme une lueur immense sur toute la science du mouvement et achève de lui donner cette unité qu'elle a acquise, grâce aux efforts de tant de génies incomparables. Les équations de Lagrange apparaissent comme une sorte d'instrument analytique universel permettant d'attaquer, sinon de résoudre définitivement, toutes les questions que l'étude du mouvement pourra soulever. En arrivant ensuite aux solides naturels, il y a une précaution indispensable à prendre : c'est de bien préciser l'étendue des hypothèses ; car on ne doit jamais oublier qu'on est et qu'on reste dans la Mécanique rationnelle, et que les prétendus solides naturels ne sont cependant, eux aussi, que des abstractions nouvelles, moins éloignées de la nature que les solides invariables de la

Géométrie, mais qui, cependant, n'existent pas plus réellement.

Il nous serait impossible de passer ici en revue toute la série des problèmes auxquels peut s'étendre la Dynamique dans le développement, d'ailleurs indéfini, de ses applications purement théoriques. Les plus remarquables d'entre eux sont peut-être ceux qui concernent l'Astronomie, ou la *Mécanique céleste,* car c'est la seule des sciences naturelles où l'on puisse arriver à une concordance aussi parfaite entre la théorie et les faits réels. Nous devons cependant la regarder, en raison de son caractère même, comme une science appliquée, et nous aurons à en dire plus loin quelques mots à ce titre.

Ce que nous voulons seulement indiquer en terminant ce paragraphe, c'est l'infinie diversité des résultats et aussi l'unité de méthode qui caractérisent cette partie de la science depuis les immortels travaux de d'Alembert, de Lagrange et de leurs continuateurs.

Les limites de la Mécanique. — Il est un écueil à éviter, et que malheureusement on n'évite pas toujours. Autant il est funeste, comme nous l'avons dit, de chercher dans la Mécanique un prétexte à problèmes de Mathématique ordinaire, autant il deviendrait dangereux d'y incorporer des chapitres qui ne lui appartiennent pas. Dans presque toutes les branches de la Physique aujourd'hui, on fait usage dans une mesure plus ou moins étendue de la Mathématique. De là est souvent résultée une tendance à vouloir introduire dans la Mécanique et soumettre à ses méthodes des questions et des théories auxquelles elle est incapable de s'appliquer, du moins aujourd'hui.

Sans que les limites puissent être tracées d'une manière absolue, il est nécessaire de laisser à la Physique la série des questions pour lesquelles une intervention directe et permanente de l'expérience est nécessaire.

La chaleur, la lumière, l'électricité, la constitution moléculaire des corps, par exemple, appartiennent incontestablement à la Physique, bien que la Mathématique puisse souvent leur être appliquée de la façon la plus utile. Plus tard peut-être, quand de nouveaux progrès auront été réa-

lisés, quand les hypothèses auront fait place à d'indiscutables vérités que nous ignorons aujourd'hui, certains chapitres de la Physique pourront-ils tomber dans le domaine de la Mécanique ; mais nous n'en sommes pas là.

Le danger principal d'une telle confusion serait d'enlever à la Mécanique le caractère de haute précision et de rigueur qui en fait une science impeccable, alors que ses appplications sont si rapprochées de la vérité naturelle, c'est-à-dire des faits. Ceci tient à ce que les hypothèses générales sur lesquelles ses abstractions sont construites sont en petit nombre d'une part, et que de l'autre ces hypothèses sont elles-mêmes fort peu éloignées de la réalité. Or, si l'on se condamnait à agir de même en Physique, on couperait court à tout progrès. La liberté la plus large dans les explications est la condition première de la marche en avant. La théorie de l'émission en lumière, celle des deux fluides en électricité, ont eu leur raison d'être et ne sont pas déjà si anciennes. Où en serions-nous si, bâtissant sur ces théories quelques chapitres de la Mécanique rationnelle, il nous fallait aujourd'hui les jeter au feu comme d'inutiles erreurs ! L'erreur est en Physique une route ouverte vers la vérité ; c'est par de perpétuels tâtonnements qu'on avance ; il n'en va pas de même dans une science mathématique telle que la Mécanique rationnelle ; et nous croyons possible, en s'appuyant sur ces idées générales, de tracer avec une précision suffisante les limites du domaine de la Mécanique.

LA MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE.

PHILOSOPHIE.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Le mot *applications* peut être compris scientifiquement, et surtout en Mathématique, de deux manières très distinctes. Lorsqu'une proposition ou même une théorie nouvelle a été établie, on est conduit, pour montrer que ce n'est pas uniquement d'une vérité isolée qu'il s'agit, à l'appliquer à un certain nombre de questions, soit pour résoudre des problèmes, soit pour en déduire encore d'autres propriétés. Les applications de cette nature font partie intégrante de la Mathématique pure; elles y sont pour ainsi dire incorporées, et l'on ne saurait comprendre la constitution d'une branche quelconque de la Mathématique, qui ne contiendrait pas d'applications.

Ce n'est donc pas de ces applications-là, dont la Géométrie analytique en particulier offre le plus frappant exemple, que nous voulons maintenant nous occuper; nous en avons dit tout ce qu'il nous semblait nécessaire d'en dire. Mais les résultats obtenus par la Mathématique pure, sous toutes ses formes et dans tous ses domaines, peuvent être utilisés pour résoudre les questions que présente à nous le monde réel. Qu'il s'agisse de problèmes pratiques dont la solution nous est demandée par les conditions mêmes de la vie, ou d'une

simple satisfaction intellectuelle, dès que nous quittons le domaine des abstractions pures pour aborder celui de la nature, des faits, nous sommes par cela même dans la *Mathématique appliquée*.

On pourrait ainsi, d'une façon à peu près satisfaisante, définir cette dernière, la partie de la Mathématique qui a pour objet d'effectuer le retour de l'abstrait au concret.

La Mathématique appliquée se subdivise par conséquent en une foule de branches, suivant la partie de la science pure dont elle fait usage, et aussi suivant la nature des questions qu'il s'agit d'étudier et de résoudre. Nous ne saurions avoir la prétention de les passer toutes en revue, d'autant plus que chaque jour peut voir éclore une science mathématique appliquée nouvelle. Nous ne nous arrêterons au contraire dans les pages qui suivront, et à titre d'exemples, que sur celles de ces sciences qui présentent un intérêt spécial au point de vue de la méthode et des idées générales.

La très grande majorité de ces sciences d'application concerne des sujets qui ont une utilité pratique évidente, et il faut bien remarquer qu'on rencontre dans la constatation de ce fait la véritable origine de la Mathématique. Dès que l'homme s'est trouvé sur la terre, en possession de son intelligence et appelé à lutter contre toutes les forces de la nature, en apparence coalisées contre lui, il lui a bien fallu s'armer pour cette lutte ; et, sans que la maxime fût exprimée, il s'est nécessairement convaincu de cette vérité « qu'on ne triomphe de la nature qu'en obéissant à ses lois ». D'un autre côté, dès que les relations sociales entre individus ou entre nations commencèrent à s'établir, les échanges, l'évaluation de la surface des champs soulevèrent des problèmes qui imposaient l'obligation de compter et de mesurer. L Astronomie, imposée pour ainsi dire à l'humanité par le spectacle permanent qu'elle nous offre, présentait en outre dans ses conséquences une utilité pratique qui saute aux yeux ; or, on n'a pu y faire quelque progrès que du jour où les premières notions de Géométrie et de calcul intervinrent.

Il n'est pas besoin d'insister davantage pour établir que c'est le besoin, que ce sont les nécessités du milieu ambiant qui ont provoqué la création de la Mathématique, et déterminé les abstractions sans lesquelles cette science eût été

impossible. Mais, aussitôt les premières fondations de l'édifice établies, le problème ne tarda pas à changer d'aspect. L'homme s'aperçut que dans la recherche de la vérité pour elle-même il y a des satisfactions intimes de l'esprit, entièrement indépendantes de toute préoccupation d'applications ultérieures. Il reconnut en outre que la plus énergique incitation à la recherche, le plus puissant des instruments de progrès était précisément ce besoin de découverte, poussé à de si hautes limites dans quelques esprits. De là suivait une conséquence : c'est que les sciences d'application se trouvaient pour ainsi dire d'autant mieux pourvues que les savants s'étaient moins préoccupés de les pourvoir, si étrange et paradoxal que cela puisse sembler.

Dans tous les cas, au point où en est arrivée aujourd'hui la culture intellectuelle dans le monde civilisé, la question ne se pose même plus et ne saurait se poser ; tout au plus est-elle soulevée de loin en loin par quelques personnes d'une ignorance totale en Mathématique, et n'ayant même pas la notion de ce qui constitue la science en général. La question « A quoi cela peut-il servir ? » est en matière de science la plus folle et la plus vaine qui se puisse poser. La meilleure de toutes les réponses à y faire est : « Qu'en savons-nous ? » Lorsque les géomètres grecs poursuivaient leurs patientes et admirables investigations sur les propriétés des sections coniques, pouvaient-ils supposer, et un seul de leurs contemporains pouvait-il supposer qu'un jour Kepler s'en servirait pour découvrir les lois des mouvements des corps célestes ; que Newton en déduirait la gravitation universelle ; que toute l'Astronomie moderne sortirait de là, et que la Géographie et la Navigation seraient appelées à recueillir le bénéfice des méditations de ces rêveurs.

Mesurer une science à son utilité est presque un crime intellectuel. Mais, quand la science est faite, que des chercheurs y trouvent ce qui est utilisable au point de vue des applications, ceci est une autre affaire. Que le mathématicien lui-même abandonne momentanément ses recherches purement abstraites pour mettre à la disposition de ses contemporains un ensemble de vérités dont on peut dès à présent tirer des applications concrètes, en le faisant, il complète sa tâche et montre une fois de plus que la science, si elle cons-

titue primitivement une satisfaction de l'esprit, n'a pas oublié son origine première et conserve son utilité.

Dans cet ordre d'idées, il me sera permis de citer un exemple contemporain et de rappeler un souvenir. Parmi toutes les nations du monde, il n'en est assurément pas une plus intéressante que les États-Unis d'Amérique, au point de vue du développement rapide qu'a pris ce pays, des progrès prodigieux de son industrie, de l'énergie et de l'initiative dont il a fait preuve. Mais tant d'activité obligée, imposée à un pays neuf par les conditions de son existence, se conciliait mal avec des recherches purement théoriques, avec la poursuite sentimentale de la vérité pure. Aussi le nombre des mathématiciens américains a-t-il été longtemps des plus réduits. Vers l'année 1873, mon ami regretté J. Houël, l'un des savants les plus instruits de son temps, et dont l'érudition mathématique était immense, m'entretenait dans une de ses lettres de la situation mathématique des diverses nations et arrivait à cette phrase typique, dont je n'ai jamais perdu le souvenir : « Quant aux États-Unis, ils importent juste la quantité de science pure qui est nécessaire à leur industrie. »

C'était très exact alors. Depuis cette époque, un savant anglais, Sylvester, mort il y a peu de temps, fut appelé à professer à Baltimore ; il y fonda un important journal mathématique, et provoqua une sorte de révolution intellectuelle à ce point de vue, en quelques années seulement. Aujourd'hui, la *Société mathématique américaine* de New-York comprend un très grand nombre de membres. La Mathématique, sous toutes ses formes et dans toutes ses parties, est professée dans de nombreuses Universités, traitée dans une foule de publications et cultivée par des savants qui ne le cèdent en rien à leurs confrères d'Europe. Elle n'est plus un objet d'importation emprunté à l'ancien monde ; c'est devenu un article essentiel de la production nationale, et cette production augmente chaque jour, comme importance et comme quantité. Ce phénomène s'est accompli, je le répète, en un très petit nombre d'années ; et il est assez curieux pour valoir la peine d'une indication.

Malgré ce développement extraordinaire, et peut-être à cause de ce développement, l'industrie américaine n'a rien

perdu de son activité, bien au contraire ; elle prend à tâche de transporter les résultats de la science pure dans le domaine des applications dès qu'elle les juge utilisables ; et c'est par centaines que l'on pourrait compter les publications américaines s'occupant chaque jour, sous une forme ou sous une autre, de Mathématique appliquée.

C'est tout naturellement dans l'art de l'ingénieur que ces applications, là-bas comme partout, trouvent surtout leur emploi. L'ingénieur, d'une façon générale, est l'homme qui est appelé par sa profession à résoudre des questions pratiques, où la connaissance des lois naturelles est nécessaire. Il emprunte à toutes les sciences pures, Mathématique, Physique, Chimie, Biologie, etc., et la Mathématique est notamment pour lui un instrument indispensable. Il ne saurait, en général, être mathématicien ; sauf de rares situations exceptionnelles, les conditions de sa profession, les obligations qui en résultent, se concilient mal avec les recherches longues et patientes qu'exige la conquête de la vérité pure ; il lui faut parfois improviser les solutions, faire preuve de coup d'œil, tel un général sur le champ de bataille. Mais cependant une éducation mathématique préalable est indispensable à l'ingénieur, et il lui faut avoir aussi l'esprit mathématique s'il veut rester à la hauteur de sa tâche.

Il doit surtout être pénétré de la nécessité de l'abstraction et comprendre sous quelles conditions peut s'effectuer le passage de l'abstraction à la réalité. Ces connaissances sont peut-être moins universellement répandues qu'on ne l'imagine ; il n'est pas rare de rencontrer des ingénieurs, d'ailleurs fort intelligents et distingués, pour vous dire qu'ils ont totalement oublié ce qu'ils ont su jadis en Mathématique; que, de tous les éléments péniblement acquis autrefois, ils n'ont jamais occasion de faire usage ; et pour conclure que les connaissances mathématiques sont plutôt un moyen de sélection imposé dans les concours, que les bases d'une éducation professionnelle effective. Je n'entends jamais ce langage sans en concevoir une profonde tristesse ; je n'y peux voir que le reflet d'un enseignement incomplet et mal coordonné, qui arrive en fin de compte à des dépenses intellectuelles énormes pour ainsi dire totalement perdues.

Certes, il n'est pas indispensable à l'homme chargé de construire un barrage ou une machine à vapeur de se rappeler la démonstration d'un théorème d'Algèbre particulier ou de résoudre tel problème de Géométrie analytique. Mais, dans les raisonnements qu'il est contraint de faire, dans les résultats numériques qu'il doit appliquer, il se trouvera exposé aux plus cruels mécomptes s'il a perdu la notion des méthodes mathématiques, s'il n'est pas en état de faire la comparaison entre les abstractions pures et les réalités concrètes qui sont sous ses yeux, et de juger des conditions sous lesquelles celles-ci sont sans inconvénient applicables à celles-là.

Aucun résultat mathématique n'est vrai, à proprement parler, quand on l'applique au monde réel, puisqu'il porte sur d'autres objets que ceux du monde réel ; mais un tel résultat est un premier guide, et un guide très utile, parce qu'il indique toujours une approximation. Cette approximation est précieuse, surtout si l'on peut en connaître les limites. On peut et on doit corriger les erreurs par l'appel à l'expérience, les comparaisons avec ce qui a été fait précédemment dans des cas analogues, et aussi par l'intervention du bon sens et de la sagacité personnelle. Mais on perdrait le meilleur des appuis si l'on était seulement réduit à des ressources de cette nature.

Dans les applications, une erreur n'est dangereuse que lorsqu'on l'ignore. Prévenu, on est en garde contre elle ; et, si l'on en connaît les limites, elle devient au contraire un bienfait.

Cet ordre d'idées m'amène à insister dès à présent sur une idée générale qui paraît relever du calcul, mais dont la portée est beaucoup plus vaste : celle des *approximations*.

On introduit parfois, soit en Arithmétique, soit en Algèbre, un chapitre particulier sur les approximations ; mais, surtout dans l'enseignement, point spécial sur lequel j'aurai à revenir plus loin, on n'établit généralement aucun lien entre cette étude et toutes les questions sur lesquelles elle réagit. On n'en cherche pas les conséquences et l'on n'en poursuit pas les analogies dans la science de l'étendue. Enfin, et ceci est plus grave encore que tout le reste, on donne à cette étude un

caractère exclusivement abstrait, ce qui la dénature et lui enlève sa principale utilité. Il y a lieu d'ajouter aussi, comme nous le prouverons, que tout le reste de l'enseignement, dans plusieurs de ses parties, révèle un mépris complet de ces notions péniblement acquises.

En n'accordant pas à la théorie des approximations la place qui lui appartient dans le domaine du concret, en ne l'appliquant pas à l'étendue, en négligeant d'en faire usage pour toutes les questions simples qui se présentent, on est arrivé, peu à peu, à infuser de plus en plus dans l'esprit de ceux qui cultivent superficiellement la Mathématique cette idée fausse que c'est la science de l'absolu. Il n'est pas surprenant, avec une pareille conception *a priori*, qu'on aille au-devant des déceptions ; mais il est bien injuste de mettre à la charge de la science les conséquences de la conception vicieuse qu'on s'en est faite.

Babinet, dans l'Avertissement de ses *Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation,* rapporte une anecdote qui nous paraît bien instructive en cette matière, sous sa forme humoristique. Je cite : « A quoi bon, disais-je à l'illustre Dulong, mettre sept ou huit décimales dans le rapport de réfraction relatif aux phénomènes de la doubles réfraction, tandis que déjà les déterminations expérimentales ne s'accordent pas entre elles dans la troisième décimale ? — Il me répondit avec une gravité ironique : Je ne vois pas pourquoi on supprimerait les dernières décimales ; car, si les premières sont fausses, peut-être les dernières sont-elles justes ! »

Une saine appréciation des approximations nous semble donc être la condition essentielle, fondamentale de toute branche de la Mathématique appliquée. D'après ce que nous avons dit plus haut, cette notion doit être complétée par une connaissance approfondie des objets concrets sur lesquels on raisonne. Ici, la nécessité n'existe plus d'établir les vérités de Mathématique pure dont on a besoin. Ces vérités sont à pied d'œuvre ; il reste à les utiliser ; pour cela, il convient de les transporter dans le domaine concret, avec une discussion qui aura pour résultat de montrer dans quelles limites seront circonscrites les erreurs résultant de cette opération ; autrement dit, sur quelles approximations il sera possible de compter.

Cette discussion est chose souvent délicate et difficile ; elle exige l'intervention de la pratique et de l'expérience, le rapprochement avec des résultats fournis par d'autres sciences que la Mathématique. Il est permis, ce qui serait une monstruosité en Mathématique pure, de considérer ici un résultat approché comme très supérieur à un résultat rigoureusement exact, si le premier est par sa nature mieux adapté à l'objet qu'on a en vue, et si en somme l'erreur finale, au point de vue pratique, est inférieure à celle qu'aurait produite la solution mathématique absolue.

On se rend compte, d'après ces observations d'ensemble, des difficultés que présente la Mathématique appliquée, et en général ce retour de l'abstrait au concret sans lequel un problème de philosophie naturelle n'est jamais complètement traité. Ces difficultés, variables avec les sujets qu'on a en vue, ne sont pas au-dessus des forces de la science, mais elles exigent un développement particulier des facultés mathématiques, en harmonie avec les nécessités du monde extérieur. De grands progrès, dans la Mathématique appliquée, ont été faits déjà ; mais il doivent compter pour peu de chose en regard de ceux qu'il reste à accomplir.

CHAPITRE II.

L'APPLICATION DU CALCUL.

Est-il besoin d'insister sur l'universalité des applications du Calcul ? Depuis la cuisinière qui fait ses comptes de ménage jusqu'à l'astronome qui accumule d'immenses travaux pour mesurer et déterminer les mouvements des corps célestes, la nécessité des opérations arithmétiques et du Calcul en général s'impose partout. Si, par une fatalité déplorable autant qu'impossible, tous les individus qui composent l'humanité se trouvaient tout d'un coup dépossédés de leurs connaissances en cette matière, le monde tomberait subitement dans un état de profonde barbarie, eussions-nous conservé nos autres aptitudes en matière de littérature et d'art, et toutes nos facultés imaginatives en général.

Il est clair cependant que la nécessité dont nous parlons s'impose à des degrés fort divers. S'il est indispensable au dernier des manœuvres de connaître au moins la pratique de quelques opérations élémentaires, il n'y a par contre qu'un très petit nombre de personnes ayant occasion de mettre en usage les fonctions elliptiques par exemple.

Nous pourrions remplir un volume entier, rien qu'en passant successivement en revue les circonstances où les diverses sciences ayant le Calcul pour objet doivent s'appliquer, et en essayant de discuter, même sous une forme sommaire, l'étendue des connaissances mathématiques nécessaires dans ces circonstances.

Nous préférons, conformément à la méthode adoptée jusqu'ici, nous en tenir à de rapides généralités, et appuyer seulement de quelques exemples les observations que nous avons à présenter.

Dans les innombrables occasions où l'on est conduit à

faire des calculs numériques, il arrive fréquemment que les mêmes opérations se répètent d'une façon très fréquente, et il en résulte une difficulté pratique, en raison de la perte matérielle de temps que cela représente. De là l'utilité des tables numériques, ou calculs faits, qui présentent de nombreux résultats dont la recherche directe serait pénible, et parfois pratiquement impossible.

Parmi ces tables, les plus simples sont les tables de multiplication, permettant d'avoir les produits de tous les nombres jusqu'à une limite déterminée. Dans bien des applications, elles peuvent être d'une réelle utilité, même en dehors des limites où elles ont été construites, parce qu'elles permettent des simplifications. En général, cependant, et à cause du temps exigé pour les recherches, les calculateurs exercés n'en font guère usage.

On leur a donné des formes diverses destinées à en rendre le maniement plus facile, et en s'appuyant en général sur des identités algébriques d'ailleurs fort simples. C'est ainsi que l'on a publié des tables de quarts de carrés, et qu'on a proposé l'empoi de tables de nombres triangulaires qui ont été l'objet d'appréciations très favorables de la part de praticiens. Il est à désirer que ce projet puisse se réaliser un jour, car tout ce qui est de nature à faire gagner du temps sur celui qu'on emploie à la manipulation matérielle des calculs est un grand bienfait.

Pour les cas particuliers, pour certaines questions qui reviennent constamment sous les mêmes formes, on a donné aussi de nombreuses tables numériques dont l'usage est continuel. Dans l'art de l'ingénieur, les exemples fourmillent ; on en trouve un autre dans les calculs d'intérêts et surtout d'intérêts composés, où des tables bien comprises ramènent à la solution d'une proportion très simple des questions, qui sans ce secours présenteraient une certaine complication.

A côté de leurs mérites, les tables cependant ont souvent produit un résultat dont il n'y a pas lieu de se féliciter. A force d'en faire usage, beaucoup en sont arrivés à s'imaginer que la connaissance du Calcul devient sans objet, et qu'il est bien inutile de se donner une peine que d'autres se sont donnée pour vous en construisant les tables dont vous faites usage. C'est là une des causes de ce délaissement de la

Mathématique, signalé plus haut, par un trop grand nombre d'ingénieurs.

Une semblable idée, cependant, est radicalement fausse. Une table numérique bien faite, quel qu'en soit l'objet, est un outil précieux, mais ce n'est qu'un outil ; et l'on n'arrivera jamais à en faire usage d'une façon efficace et sûre si l'on ne possède pas à fond le maniement de cet outil, si l'on ne sait pas comment il a été fabriqué, dans quelles limites il est permis d'en faire usage, et quelles sont les précautions à prendre pour s'en servir.

En dehors de ces tables particulières, il en est d'autres auxquelles nous devons nous arrêter quelques instants, tellement elles rendent de services, tellement elles sont rigoureusement indispensables dans toute la Mathématique appliquée. Nous voulons parler des tables de logarithmes, merveilleuses entre toutes, puisqu'elles permettent de substituer aux multiplications de simples additions, aux divisions des soustractions, et, comme conséquence, de calculer avec une extrême facilité les puissances d'ordres quelconques ou les racines d'indices quelconques.

Les tables de logarithmes présentent peut-être le plus simple et le plus frappant exemple du lien qui réunit les questions pratiques courantes aux spéculations élevées de la science pure. La découverte des logarithmes, c'est-à-dire des fonctions jouissant des belles et utiles propriétés que nous connaissons aujourd'hui, se rattache au fond au Calcul infinitésimal; elle touche étroitement à l'étude d'une équation différentielle, et il est peu probable que Neper y ait été conduit par d'autres considérations qu'un ardent désir d'accéder à la vérité ; et, cependant, cette découverte a été la source d'avantages pratiques sur lesquels il serait puéril d'insister.

C'est sous deux formes distinctes que se présentent les tables de logarithmes d'un usage courant, et qui sont devenues très nombreuses. Elles fournissent d'abord les logarithmes des nombres, soit de 1 à 10000, soit dans des limites plus étendues; et puis, dans une seconde partie, elles donnent les logarithmes des fonctions circulaires : cosinus, sinus, etc. Il est permis à ce sujet d'éprouver deux regrets : le premier, c'est que l'usage des fonctions dont il s'agit ne soit pas accompagné de celui des fonctions hyperboliques, dont

l'étude est aussi simple, et dont l'utilité est presque aussi grande dans une foule de questions; le second, c'est qu'on ait renoncé, en outre des logarithmes, à se servir de tables donnant les valeurs elles-mêmes des fonctions (circulaires ou hyperboliques), ou, comme l'on dit quelquefois, les *valeurs naturelles* de ces fonctions.

Les tables de logarithmes se présentent sous un assez grand nombre de dispositions différentes; on a pris à tâche de leur donner un grand caractère de clarté, permettant d'éviter autant que possible les fautes matérielles de lecture. Mais elles se distinguent surtout les unes des autres par le nombre des décimales avec lequel les logarithmes y sont calculés. Il est bien évident que l'approximation atteinte sera d'autant plus grande (car les calculs par logarithmes ne sont que des approximations) que ce nombre de décimales sera plus grand. Ceci appelle une observation d'ordre général. Lorsqu'on veut arriver à un résultat, il faut proportionner ce résultat aux instruments dont on se sert et ne pas demander plus que ce qu'ils peuvent donner. Or, dans toutes les conditions ordinaires de la pratique, dans l'art de l'ingénieur, en particulier, le calcul des logarithmes avec 5 décimales, et même avec 4, suffit largement aux besoins. Dans certaines questions d'Astronomie ou de Physique mathématique, on peut avoir recours utilement à beaucoup plus de décimales; mais, en dehors de ces cas exceptionnels, il n'en est pas ainsi. Dès lors l'usage des tables à 7 décimales, par exemple, devient dans la pratique une inutilité, et pis encore. S'il s'agit de trouver une longueur sur le terrain, que cette longueur ait une vingtaine de kilomètres, et qu'on la calcule avec le secours d'une table de logarithmes à 7 décimales, on pourra l'obtenir à 1 centimètre près; or, si les moyens matériels de mesure employés laissent possible une erreur en plus ou en moins d'un mètre ou deux sur une vingtaine de kilomètres, l'approximation extrême qu'on a obtenue n'est qu'une chimérique apparence, et un leurre en même temps, car il s'ensuit une confiance injustifiée en des résultats que l'expérience ne vient pas confirmer.

On ne saurait donc assez conseiller à tous les praticiens qui ont à faire usage des logarithmes, de choisir leurs tables de manière à les mettre en concordance avec la moyenne des

approximations possibles ou désirées. Ils agiront sagement aussi en n'oubliant pas, à force de se servir des tables de logarithmes, ce que c'est qu'un logarithme, s'ils ne veulent pas être les esclaves et les victimes de l'instrument qu'ils emploient et qu'ils doivent diriger.

Nous ne saurions abandonner ce sujet sans dire un mot des instruments logarithmiques de calcul, qui peuvent rendre tant d'utiles services et permettent, avec un peu d'habileté facile à acquérir, d'obtenir des approximations bien supérieures à ce qu'on pourrait supposer. Ces petits appareils si simples, soit sous la forme de règles, soit sous celle de cercles, devraient être universellement répandus parmi ceux qui ont à appliquer le Calcul. Beaucoup d'ingénieurs, du reste, en font un constant usage.

Ce n'est pas seulement de la fonction logarithmique, ainsi convertie en tables ou en instruments, que les sciences d'application peuvent avoir à faire usage. A tout instant, et de la manière la plus inattendue, la question de l'étude d'une fonction particulière se présente et exige la mise en œuvre des connaissances d'Algèbre ou de Calcul infinitésimal de nature à rendre possible cette étude. Nous ne faisons même pas allusion ici à l'emploi possible des fonctions elliptiques assez peu répandu encore; nous voulons simplement parler de questions beaucoup plus élémentaires et d'un usage fréquent. La méthode des représentations graphiques offrira souvent d'immenses avantages; elle permet de se rendre rapidement compte, par un dessin ou même par un simple croquis, des variations de la fonction qu'il s'agit d'étudier; de résoudre grossièrement, et à vue, les équations qui nous intéressent, et d'ébaucher ainsi les problèmes pratiques par une approximation, évidemment insuffisante, mais qui constitue néanmoins une excellente préparation à la solution définitive.

Nous voyons déjà le Calcul apparaître sous des formes bien diverses dans la pratique de la vie. La connaissance des opérations arithmétiques, pour ne parler que de son usage tout à fait évident, est indispensable en comptabilité. Mais ce n'est pas seulement à cela que peuvent se borner les services

rendus par la Mathématique en cette matière. Plusieurs mathématiciens ont pris à tâche, en s'inspirant de principes logiques et rationnels, de construire une méthode de tenue de livres mieux coordonnée que celles qui sont actuellement en vigueur et dont l'origine est plus ou moins empirique. Sous le nom de *Logismographie,* ces recherches ont même commencé à prendre le caractère d'une doctrine nouvelle; et il est à espérer que la Mathématique trouvera là encore, un jour ou l'autre, une occasion d'ajouter un service nouveau à ceux qu'elle a déjà rendus.

Il est une branche des sciences économiques, la Statistique, qui est obligée de faire aussi constamment appel aux ressources du calcul; elle y a ajouté avec grand profit, depuis un certain nombre d'années, l'intervention des méthodes graphiques sous bien des formes différentes. Mais ce n'est pas à la seule Statistique qu'on a tenté de faire application du calcul dans le domaine des sciences économiques et démographiques. Il y a bien des années déjà que furent poursuivies des études, notamment par M. Walras, de Lausanne, ayant pour objet de faire rentrer l'économie politique dans les sciences auxquelles la Mathématique peut s'appliquer. Si ces essais n'ont pas toujours donné des résultats sur lesquels tout le monde soit d'accord, il faut s'en prendre surtout aux sujets eux-mêmes qui, plus d'une fois, par leur nature, prêtent à controverses et n'offrent pas scientifiquement un caractère de solidité suffisant. Il faut dire aussi que parmi les économistes quelques-uns sont peu préparés à un traitement mathématique des questions dont ils s'occupent. Cependant, les tentatives dont nous parlons n'ont pas été abandonnées; on a même donné un nom, la *Chrématistique,* à l'application générale de la Mathématique aux sciences économiques et sociologiques.

Dans cet ordre d'idées, il est un domaine spécial dont la Mathématique a pris possession d'une façon souveraine, pour y faire application d'une science dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici : le Calcul des probabilités. Il s'agit des assurances, et notamment des assurances sur la vie, qui ne sauraient exister en dehors de l'application constante du Calcul.

Le Calcul des probabilités affecte en soi les apparences d'une science pure et fait appel dans quelques-unes de ses parties aux notions mathématiques les plus élevées et les plus difficiles. Mais il convient de lui laisser sa place dans la Mathématique appliquée, à cause du rôle fondamental que joue l'expérience dans les hypothèses premières. Là, il ne s'agit plus seulement d'abstractions effectuées d'après une observation antérieure; on se propose d'étudier des événements sur l'arrivée et l'ordre de succession desquels nous ne savons rien, mais que nous *supposons* également probables. C'est à la fois plus et moins qu'une abstraction; et une telle méthode ne peut avoir quelque valeur dans les résultats qu'elle présente, que par une continuelle intervention de l'expérience venant à l'appui de l'hypothèse primitive. C'est ce qui se produit à un très haut degré dans les assurances, et cela tient au nombre considérable des observations faites. Aussi la pratique est-elle venue donner un éclatant démenti à Auguste Comte, qui s'était cruellement trompé sur les probabilités, déclarant cette conception philosophique « radicalement fausse et susceptible de conduire aux plus absurdes conséquences ».

Le Calcul des probabilités trouve également son application dans les questions concernant les jeux de hasard, et aussi dans des problèmes relatifs au tir des armes portatives ou de l'artillerie.

S'il est une branche, dans la Mathématique, qui paraisse se refuser à toute application pratique et destinée seulement à la satisfaction de l'esprit, c'est assurément la Théorie des nombres. S'imaginer qu'il en est ainsi serait cependant une erreur. Certaines séries numériques, telles que les suites de Farcy et de Brocot, sont le résultat de recherches faites sur des combinaisons d'engrenages au point de vue du nombre des dents. D'un autre côté, et dans une branche industrielle très différente, Ed. Lucas a montré tout l'intérêt qu'offrait la théorie des nombres premiers pour la composition des *armures* de tissus. Il a même publié plusieurs Mémoires très dignes d'intérêt sur la *Géométrie du tissage*. Je me souviens qu'il me disait un jour avoir personnellement connu un industriel, d'ailleurs fort intelligent, mais n'ayant aucune

notion de Théorie des nombres, qui, ayant été conduit à l'étude de certaines questions pratiques concernant le tissage, avait ainsi retrouvé plusieurs propriétés intéressantes des nombres.

Je ne saurais me dispenser, en terminant ce chapitre, de mentionner au moins *les machines à calculer,* ces appareils précieux destinés à abréger le temps inutilement employé. Elles effectuent mécaniquement les opérations sur les nombres entiers. Ce problème difficile a tenté le génie de Pascal. De grands géomètres, tels que Tchebycheff, parmi nos contemporains, n'ont pas dédaigné de s'en occuper depuis. Parmi ces très nombreux appareils, dont le défaut général, et peut-être obligé, est une trop grande complication, il en est un, l'arithmomètre Thomas, dont l'usage est très répandu et qui présente de grandes qualités pratiques. La plupart des compagnies d'assurances, de grandes administrations financières ou statistiques se servent quotidiennement de l'arithmomètre.

Enfin, il serait injuste de passer sous silence les inventions d'un savant qui était doué d'une aptitude véritablement exceptionnelle dans ce genre de recherches, Henri Genaille. Les réglettes à calcul qu'il a publiées jadis, en collaboration avec Ed. Lucas, sont une véritable merveille d'ingéniosité, même au point de vue purement scientifique, en dehors de l'intérêt pratique réel qu'elles présentent. Elles donnent à vue les produits d'un nombre quelconque par un multiplicateur d'un chiffre. Depuis lors, les recherches de Genaille ont fait l'objet de nombreuses et intéressantes communications; et nous croyons savoir que, si d'aussi utiles inventions n'ont pu pénétrer jusqu'ici dans la pratique et rendre les grands services qu'on en peut attendre, la faute n'en fut pas à l'inventeur. Peut-être, dans quelques siècles, et lorsque ces appareils auront été construits depuis longtemps au delà des frontières, reviendront-ils en France et seront-ils appréciés comme ils méritent de l'être... par nos petits-neveux!

CHAPITRE III.

L'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE.

S'il faut s'en rapporter à l'origine du mot « Géométrie », le but que l'on poursuivit primitivement dut être celui de mesurer la Terre, ou plus probablement « les terres », c'est-à-dire la surface des champs. Aujourd'hui encore, la détermination de cette mesure n'est pas la moins intéressante des applications pratiques de la Géométrie. L'*Arpentage* ne paraît donner lieu qu'à l'emploi de propositions fort simples de Géométrie plane. On y trouve cependant, et d'une façon fréquente, l'occasion d'utiliser d'intéressantes propriétés des figures, si l'on cherche à opérer avec la plus grande économie de temps et de peine, sans rien sacrifier de la rigueur. Il faut nécessairement une certaine habileté pratique, un apprentissage consommé dans le maniement des appareils et la mise en œuvre des procédés en cours; mais ce n'est pas de ce côté de la question que nous nous occupons; en supposant une égale habileté, l'arpenteur qui possède des notions géométriques précises et sûres aura toujours une incontestable supériorité sur celui qui en est dépourvu. Certaines difficultés surgissent qu'on n'avait pas prévues; certains problèmes s'imposent ; et ce n'est pas exagérer que d'affirmer que les notions de la Géométrie moderne elles-mêmes peuvent souvent trouver ici à s'utiliser. Du reste, l'un des services publics les plus importants en France, et qui se rattache à cette catégorie d'applications, celui du cadastre, compte des hommes qui sont des ingénieurs de beaucoup de mérite, pourvus de fortes et sérieuses connaissances de Mathématique pure.

Dans cette question de l'Arpentage, il y a plus que jamais occasion de proportionner l'approximation que l'on poursuit à la puissance des moyens mis en œuvre et à la nature des

questions. Celui qui évaluerait l'aire d'un champ de quelques hectares en se trompant d'un are ou deux serait un piètre arpenteur; mais celui qui prétendrait la déterminer à un millimètre carré près serait un fou.

La même observation s'applique aux questions de *cubage*, qui sont l'application directe de la Géométrie de l'espace aux mesures, dans des conditions analogues. Les moyens mathématiques permettant de déterminer le volume d'un fil métallique de la finesse d'un cheveu, ou celui d'une tour cylindrique de 50 mètres, sont assurément les mêmes. Mais le retour de l'abstrait au concret s'opère dans des conditions totalement différentes dans les deux cas et nécessite l'intervention de qualités nouvelles.

Mesurer la surface terrestre, dans l'une de ses portions, ne suffit pas pour un grand nombre d'applications. Il nous faut en outre la représenter, c'est-à-dire pouvoir en donner une image fidèle. Cette surface, tout d'abord, n'est pas plane; elle présente des irrégularités plus ou moins accusées; elle est en outre parsemée d'accidents divers, cours d'eau, voies de communication, constructions, etc., qui s'y trouvent placés par la nature ou par la main de l'homme. Cette représentation s'obtient conventionnellement, sur une feuille de papier sensiblement plane, par les procédés de la *Topographie*, qui ne cesse de faire un constant appel à la Géométrie pour les diverses opérations qu'elle exige.

Les procédés en question sont naturellement variables suivant le degré d'exactitude que l'on poursuit, et qui dépend surtout lui-même de l'échelle employée. Il s'ensuit que la Topographie met en œuvre au plus haut point les qualités de sagacité, en même temps qu'elle nécessite une profonde connaissance de la Géométrie.

Il y a bien peu de situations où des notions au moins élémentaires de Topographie ne trouvent pas leur emploi. Indispensable à l'ingénieur, d'un intérêt tout à fait capital au point de vue militaire, la Topographie est aussi nécessaire à l'agriculture; sans son secours, les drainages, les irrigations sont impossibles à concevoir et à exécuter d'une façon rationnelle. Nous croyons qu'elle présente de plus, au seul point de vue scientifique, le grand mérite de ramener

sans cesse l'esprit à la notion du relatif et de bien montrer quelles sont les relations de l'abstrait et du concret. Sans Géométrie, la Topographie ne saurait exister. Mais, en se bornant à mettre en usage les propriétés que nous fournit la Géométrie pure, nous arriverions à une Topographie incomplète et souvent impraticable. Il est nécessaire à chaque instant d'employer des méthodes approchées à la place des méthodes exactes, et d'apprécier les limites des erreurs qui s'ensuivront. A tous ces titres, la Topographie, dont la pratique est difficile, mais dont les principes sont simples, devrait tenir une place peut-être plus importante encore que celle qu'elle occupe aujourd'hui.

C'est à la Topographie qu'on peut rattacher l'*Hydrographie*, représentation du fond des mers, et qu'il nous suffit ici de mentionner.

Toute opération topographique ne peut s'effectuer d'une manière efficace qu'en s'appuyant sur certains repères fixes préalablement établis. Ces repères sont fournis par la *Géodésie*, qui constitue également l'une des importantes applications de la Géométrie. Mais ici, l'esprit général de la Science et les méthodes qui en découlent sont d'un ordre entièrement différent. Le problème consiste à placer sur toute la surface d'un pays, et en assez grand nombre, une série de points dont on détermine les positions, soit sur une surface idéale qui est par exemple celle du niveau moyen des mers, soit au-dessus de cette surface, ce qui constitue le problème particulier du *nivellement*.

Nous ne voulons pas entrer dans la description des moyens généraux qu'emploie la Géodésie, expliquer ce que c'est que la triangulation, non plus que les réseaux géodésiques des divers ordres. Mais ce que l'on doit retenir, c'est que, pour la triangulation du premier ordre notamment, la poursuite de l'exactitude la plus rigoureuse s'impose impérieusement, à l'inverse de ce qui se produisait en Topographie. Le problème est donc celui de pousser l'approximation à son maximum, lequel dépend à la fois des méthodes et de la perfection des instruments. Il n'est plus permis de négliger la courbure générale de la surface terrestre ; on ne saurait l'assimiler à un plan, à cause des grandes étendues sur lesquelles on opère. Bien plus, on ne se contentera même pas d'assimiler

cette surface à une sphère, on tiendra compte de l'aplatissement du globe ; d'où la nécessité de faire intervenir des notions délicates et complexes de Géométrie pure, relatives à la théorie des surfaces. Nous sommes cependant ici dans une science appliquée, et il n'y a pas à se dissimuler que les résultats obtenus seront entachés d'erreurs ; seulement, il faut que ces erreurs soient aussi faibles que possible ; il faut surtout que nous en connaissions très nettement les limites. Le temps et le travail ne sont plus ici que des éléments secondaires ; on fera toute la dépense nécessaire à ce point de vue, sans essayer de poursuivre une économie qui irait contre le but à atteindre. On se ménagera en outre des moyens de vérification nombreux et variés, s'entr'aidant et se contrôlant les uns les autres ; et, si des opérations ont conduit à des résultats entachés d'erreurs supérieures à la limite qu'on sait pouvoir s'imposer, ces opérations seront au besoin reprises de toutes pièces.

On ne peut se défendre d'une véritable admiration pour le degré d'exactitude auquel atteint la Géodésie moderne, pour la belle conception de ses méthodes et la perfection presque idéale des instruments qu'elle emploie. Si pourtant des progrès nouveaux, ce qui semble d'ailleurs peu probable, amenaient ces instruments à un degré de perfection plus considérable encore, on ne se contenterait plus des résultats obtenus aujourd'hui ; ils seraient regardés par nos successeurs comme une approximation grossière, si admirables qu'ils nous paraissent actuellement.

Il est à peine utile de faire remarquer que, dans les problèmes que pose la Géodésie, la représentation graphique n'est plus d'aucun secours ; car, dans le dessin le plus rigoureusement exécuté, il s'introduit des erreurs graphiques très supérieures à la limite qu'on s'est imposée. Il y a donc nécessairement ici une application simultanée de la science de l'étendue et de celle du calcul.

Parmi les sciences qui se rapportent à l'étude de la surface terrestre, il en est une qui ne faisait jadis qu'un bien discret appel à la Mathématique : c'est la Géographie ; cet état de choses s'est modifié, et l'on s'occupe aujourd'hui, à l'étranger plus qu'en France, il faut le dire, de *Géographie mathéma-*

tique. Nous nous bornerons à l'un des côtés des nombreuses questions soulevées par cette application, en présentant quelques considérations d'ensemble sur l'établissement des *cartes géographiques*.

Lorsqu'il s'agit de figurer une portion plus ou moins considérable de la surface terrestre au moyen de tracés exécutés sur un plan, le problème est évidemment impossible, du moins en essayant de former une figure semblable. La surface réelle, en effet, est une sphère ou une surface courbe se rapprochant de la sphère; car, bien entendu, on négligera ici les accidents de détail des terrains. La carte au contraire est plane. C'est donc par une certaine transformation de la surface courbe sur un plan que devra se faire la construction. On tracera sur le plan les figures transformées d'un certain nombre de méridiens et de parallèles régulièrement espacés, et l'on aura un *canevas géographique*.

Chacune des transformations dont il s'agit correspond à ce qu'on appelle un système de *projection géographique*. On peut en imaginer à l'infini, et quelques-uns de ces systèmes sont plus généralement en usage. On adopte les uns ou les autres suivant le but que l'on se propose. Tantôt on veut déformer le moins possible les figures, c'est-à-dire conserver les angles; tantôt il y a intérêt à ne pas altérer les aires. Dans la pratique, et pour une contrée d'étendue moyenne, comme cela a eu lieu pour les cartes de France, pour celles du Service géographique de l'armée et du Service vicinal, par exemple, on s'efforce, par des moyens plus ou moins empiriques ou conventionnels, d'arriver à un certain équilibre entre les divers inconvénients et les avantages des différents systèmes. Des travaux extrêmement intéressants au point de vue purement scientifique ont été faits en grand nombre sur ce sujet. Les problèmes dont il s'agit touchent, comme on le voit, à la question plus générale de la représentation des surfaces les unes sur les autres, et exigent l'intervention simultanée de la Géométrie et de la Géométrie analytique dans les parties où cette dernière emploie le Calcul infinitésimal.

Soit en Géodésie, soit en Géographie, on est conduit à se servir des résultats d'une autre science d'application qui se

relie assez étroitement aux deux premières : c'est l'*Astronomie,* qui peut être étudiée à deux points de vue très différents. S'il s'agit de déterminer les mouvements réels des corps célestes, on est dans le domaine de la Mécanique céleste, dont nous dirons quelques mots au Chapitre suivant. Mais on peut aussi envisager l'Astronomie en se préoccupant seulement des positions des astres relativement aux observations que nous en pouvons faire à la surface de la Terre. La science réduite à ces proportions forme l'*Astronomie descriptive,* à laquelle s'applique la Géométrie. Rien qu'en rapportant, comme le faisaient les anciens, les positions des astres à la sphère idéale qu'on appelle la *sphère céleste,* les problèmes que l'on est amené à résoudre exigent l'emploi de la Géométrie et du Calcul d'une façon permanente. Les figures sphériques, naturellement, jouent un rôle considérable dans ces questions, où l'on est conduit à envisager les coordonnées célestes permettant de fixer la position de chacun des astres étudiés. Ce sont ces mêmes considérations qui permettent aussi la détermination de la position des points à la surface de la Terre ; les coordonnées terrestres employées dans ce but sont la longitude et la latitude, c'est-à-dire l'angle que forme le méridien du point considéré avec celui d'un méridien adopté pour origine, et l'angle que forme avec le plan de l'équateur un rayon terrestre qui aboutit au point considéré. La détermination des longitudes et des latitudes est une des plus importantes questions de l'Astronomie descriptive, et présente dans la pratique des difficultés qui exigent, pour être surmontées, à la fois beaucoup de science et beaucoup d'expérience acquise.

Ici, bien entendu, comme en Géodésie, les approximations sont poussées aussi loin que le comporte la nature des observations ; et, comme cette exactitude extrême est du plus haut prix, on n'hésite pas à faire de grands sacrifices pour augmenter sans cesse la perfection des instruments. Pour se faire une idée de la rigueur des observations, il n'est pas inutile d'indiquer un résultat d'une vérification d'ailleurs immédiate. On rencontre souvent, dans la mesure des angles en Astronomie, des évaluations poussées jusqu'au dixième de seconde. Or, la différence de latitude entre deux points sur le même méridien, si elle est d'un dixième de seconde,

correspond à une distance de $3^{m},09$ environ entre les deux points. L'angle dont on peut se tromper ainsi est celui sous lequel on verrait un objet de moins de 39^{cm} à la distance de Paris à Marseille ! Cette image suffit à donner une idée de la précision des résultats possibles en Astronomie. Et pourtant, l'abîme qui sépare l'abstraction pure de la théorie, la valeur absolue de la valeur approchée, n'en reste pas moins profond ; car ce même angle d'un dixième de seconde, tout à fait négligeable à nos yeux et à la surface de la Terre, représentera des milliards de milliards de kilomètres, comme erreur, s'il est lui-même une erreur commise dans la détermination de la position de telle étoile fixe.

C'est à ce point de vue que l'Astronomie, en dehors de son évidente utilité pratique, a une importance philosophique de premier ordre dans les sciences d'application, et cela même quand on la considère simplement à l'état d'Astronomie descriptive. Elle seule nous présente un tel clavier de grandeurs concrètes, elle seule peut donner une idée précise des conditions différentes dans lesquelles peut s'effectuer le passage de l'abstrait au concret.

Une des applications particulièrement utiles de l'Astronomie, et par conséquent de la Géométrie, est la *Navigation*. La détermination des coordonnées terrestres y joue un rôle capital, et cette détermination est ici entourée de difficultés pratiques particulières, tenant à la mobilité de l'observateur et à l'absence générale de repères fixes, sinon dans le voisinage des côtes. Ce problème n'est du reste pas le seul. La détermination des routes à suivre à la surface des eaux nécessite, par exemple, des notions géométriques assez élevées. Qui pourrait jamais dire le nombre des existences humaines sauvées par la Science mathématique appliquée à la Navigation ?

Mais il est temps d'arriver à une science à laquelle la Géométrie s'applique par excellence, plus particulièrement. Nous voulons parler de la *Géométrie descriptive*. De temps immémorial, et jusqu'au siècle dernier, on a reconnu la nécessité de se livrer, dans la pratique des constructions, à une représentation exacte des objets ; cette nécessité s'imposait d'une façon toute particulière dans l'emploi de la pierre et du bois.

Aussi les corporations de charpentiers ou de tailleurs de pierre possédaient-elles des procédés innombrables, que souvent elles gardaient secrets avec un soin jaloux, pour résoudre les problèmes pratiques. Mais autant de problèmes, autant de procédés, parfois ingénieux, mais généralement pénibles et sans lien entre eux. Il était réservé au génie de Monge d'effectuer la synthèse de toutes ces solutions de détail, de les coordonner en une doctrine unique dont la constitution est rigoureusement scientifique. Elle l'est tellement qu'en toute rigueur nous aurions pu ranger la Géométrie descriptive parmi les branches de la Mathématique pure. Mais elle a beau opérer sur des abstractions géométriques, le but de la science dont il s'agit est tellement net, et son origine trahit si naturellement sa tendance nécessaire, qu'il nous a paru plus naturel de la mettre au nombre des sciences appliquées.

Il s'agit, on le sait, de la représentation des objets de l'espace par des figures planes. Monge y a substitué la représentation des figures géométriques ; il a employé pour cela le système des projections sur deux plans perpendiculaires, l'un supposé horizontal, l'autre vertical. Un point se trouve défini nettement par ses deux projections, et dès lors, toute figure, étant composée de points, sera représentable aussi de la même manière. Depuis qu'elle a été créée, la Géométrie descriptive a fait d'immenses progrès, accumulant les méthodes, simplifiant les constructions, et arrivant même parfois de la façon la plus heureuse au secours de la pure science géométrique elle-même. Cependant, elle n'a pas perdu de vue son origine première et sa raison d'être ; et les deux grandes catégories de questions auxquelles la Géométrie descriptive était surtout destinée forment deux sciences d'application spéciales : la *Stéréotomie* et la *Charpente,* dont l'usage pratique est perpétuel.

A la Géométrie descriptive se rattache aussi la Perspective, cependant plus ancienne, et qui permet d'obtenir une représentation répondant aux apparences présentées par les objets, et non plus à leurs dimensions réelles.

Enfin, il est possible de concevoir encore un mode de représentation dans lequel on ne fait emploi que d'un seul plan horizontal de projection. Un point, dans ce système, est

représenté par sa projection accompagnée d'un chiffre qui donne l'indication de la distance de ce point à un plan horizontal fixe de comparaison, placé au-dessous ou au-dessus.

C'est grâce à ce système des *projections cotées* qu'on établit les plans topographiques dont nous avons parlé plus haut et aussi les cartes hydrographiques ou cartes marines.

Ces divers modes de projection, et quelques autres dont l'usage est moins général, reposent sur un emploi permanent de la Géométrie elle-même, et ont donné souvent naissance à des problèmes dont la solution est venue enrichir la Science pure.

Nous voudrions maintenant parler d'un ordre tout différent d'applications de la Géométrie : ce sont celles qui ont pour objet les opérations du calcul lui-même. Toute opération de calcul peut se traduire par une construction géométrique. Les théorèmes de la Géométrie permettent souvent d'économiser les constructions et d'obtenir ainsi, par des tracés, et avec la précision que ces tracés comportent, des résultats beaucoup plus longs et pénibles à obtenir par le calcul lui-même. L'ensemble des méthodes adoptées dans ce but constitue le *Calcul graphique,* dont il semble qu'on doive trouver l'origine dans un livre de Cousinery, *le Calcul par le trait,* qui remonte à 1840. Ces méthodes ont été très développées depuis, et l'usage s'en est de plus en plus répandu dans la pratique. Il en est même résulté une nouvelle branche spéciale, la *Statique graphique,* ainsi nommée parce que la grande majorité des questions qu'elle traite sont empruntées à la Statique et à ses applications. Nous citerons parmi ces questions les polygones funiculaires, les polygones de Varignon, les conditions de stabilité des voûtes ou des murs de soutènement ; mais elles sont pour ainsi dire illimitées et il n'est pas rare aujourd'hui, dans beaucoup d'ateliers ou de bureaux, de voir remplacer, par des tracés exigeant un temps relativement court, les calculs auxquels conduirait la solution de tel problème pratique.

Il est bon de remarquer que, dans beaucoup de cas, ces solutions sont parfaites, bien qu'approximatives. Si en effet

les tracés sont bien exécutés, et si l'on est sûr que l'erreur graphique n'est pas supérieure aux approximations limites que comporte la nature concrète de l'objet traité, il est évident que le calcul mathématique rigoureusement exact ne saurait rien donner de plus. Il n'est pas même besoin d'aller toujours jusque-là ; si l'on sait d'avance, par l'expérience et la pratique, qu'une approximation déterminée suffit, il est inutile de chercher à atteindre au delà, quand même on le pourrait. On trouve fréquemment dans cette remarque l'occasion d'une grande économie de temps et de peine, lorsqu'on se propose d'appliquer à une question les méthodes de la Statique graphique et plus généralement du Calcul graphique.

Il est encore une dernière forme sous laquelle la Géométrie et en même temps la Géométrie analytique viennent prêter leur aide au calcul ; c'est par l'emploi des *abaques,* auquel M. d'Ocagne a apporté de grands perfectionnements, et dont il a fait, sous le nom de *Nomographie,* un nouveau corps de doctrine. Sous ce titre, suivi du sous-titre : *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques,* il a publié en 1891 un excellent exposé de cette doctrine, aussi remarquable par la clarté et la concision (il comprend à peine une centaine de pages) que par le choix et la variété des exemples d'application. Les indications suivantes sont extraites à peu près textuellement de la Préface de cet intéressant Volume, ou empruntées à d'autres écrits de M. d'Ocagne. Il m'a semblé qu'en cette occasion je ne pouvais mieux faire que de laisser à l'auteur lui-même le soin d'expliquer le but de la méthode, et les moyens à mettre en œuvre pour atteindre ce but.

La Nomographie peut fournir la représentation sur un plan, au moyen de certains systèmes de courbes faciles à construire, et construites une fois pour toutes, des équations qui lient entre elles les quantités soumises au calcul. De tels tableaux graphiques, ou abaques, donnent, par une simple lecture, les résultats à déduire de la formule à laquelle ils s'appliquent, et suppriment ainsi, une fois construits, toute espèce d'opérations.

Leur exécution représente un certain travail, beaucoup moindre que celui nécessaire à la construction de tables

numériques pour le même objet. Cette exécution du reste ne sera avantageuse que pour des formules d'un usage fréquent ; mais ces formules sont nombreuses dans la pratique.

La première idée des abaques semble remonter à Pouchet (1795). Depuis lors, M. Lalanne surtout la perfectionna en imaginant le principe de l'anamorphose.

Pour en comprendre l'intérêt il faut indiquer rapidement sur quoi repose la construction d'un abaque ; une équation $f(x, y, z) = 0$ est représentée si, donnant à z une certaine valeur z_0, on trouve la courbe $f(x, y, z_0) = 0$ qui s'ensuit, et si l'on en fait autant pour un grand nombre de valeurs de z. Si l'on suppose ces lignes tracées sur un plan quadrillé parallèlement aux coordonnées OX, OY, on a l'abaque de l'équation proposée ; chaque courbe particulière répondant à une valeur déterminée de z est une *ligne isoplèthe* qui peut être désignée par une cote.

Ceci étant, le principe de l'anamorphose de M. Lalanne a pour but, lorsque la forme de l'équation s'y prête, d'opérer une transformation qui substitue aux courbes isoplèthes de simples droites. Ce principe peut être généralisé, et l'on arrive à avoir trois systèmes de droites variables ; la condition pour que trois droites, chacune d'un des systèmes, soient concourantes, se traduit précisément par l'équation proposée, dont l'abaque ainsi construit fournit la représentation.

Enfin, M. d'Ocagne, par une application judicieuse du principe de dualité, est parvenu à substituer aux abaques à droites isoplèthes d'autres abaques à points isoplèthes, plus simples, plus clairs, et s'appliquant à des équations à plus de trois variables.

M. l'ingénieur des mines Lallemand, connu pour ses beaux travaux de Géodésie, a fait connaître aussi un procédé très ingénieux, applicable à une catégorie particulière d'équations à plus de trois variables.

De nouvelles extensions indiquées par M. d'Ocagne, et fondées sur d'autres principes, donnent une portée plus grande encore à l'usage des abaques, et ont permis de compléter l'exposé systématique présenté sous le nom de *Nomographie*.

Au point de vue philosophique, on peut faire un rappro-

chement entre la Nomographie et la Géométrie descriptive. L'un et l'autre de ces corps de doctrine ont pour but la mise en application de certains principes, en vue de certains besoins absolument pratiques. La Géométrie descriptive ramène au plan les faits de l'*espace*, la Nomographie ceux du *nombre*. L'un repose sur l'emploi de quelques propositions simples de Géométrie pure, l'autre sur quelques principes non moins élémentaires de Géométrie analytique.

CHAPITRE IV.

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE.

S'il est une science dont les résultats soient de nature à frapper d'admiration les esprits, même ceux qui y sont le moins initiés, c'est assurément l'Astronomie. Nous avons rapidement indiqué dans le Chapitre précédent les caractères de l'Astronomie descriptive. Mais c'est surtout sous sa seconde forme, la *Mécanique céleste,* qu'elle arrive à exercer sur l'imagination cette action d'une intensité profonde. La raison en est facile à comprendre. En Astronomie descriptive, on enregistre les faits provenant des observations; si délicates et difficiles que soient ces observations, si précises que soient les mesures qu'elles comportent, rien en cela ne semble sortir du domaine habituel de la Science. On étudie bien les mouvements des astres et les divers phénomènes astronomiques, mais c'est toujours au point de vue du passé et du présent.

En Mécanique céleste, au contraire, comme on fait remonter à l'action de forces connues les mouvements dont il s'agit, on en peut calculer les lois. Dès lors, on sait de façon précise quelles positions doivent être occupées par chacun des astres à un instant quelconque; et l'on arrive ainsi à pouvoir *connaître l'avenir,* au point de vue des phénomènes célestes; c'est cette faculté de prédiction, s'exerçant sur des sujets semblant inaccessibles, qui force l'admiration du vulgaire et lui fait attribuer à l'Astronomie une sorte de puissance mystérieuse.

Au point de vue philosophique, elle est, de toutes les applications de la Mécanique rationnelle, celle dont les phénomènes se trouvent concorder au plus haut degré avec les résultats de la Science pure.

Dans tout fait mécanique observable sur la Terre, en effet, les complications sont extrêmes; les causes physiques con-

courant au résultat final sont innombrables, enchevêtrées, se refusent à toute analyse; et par conséquent les conditions réelles, concrètes, sont très éloignées des abstractions.

Lorsqu'il s'agit des phénomènes célestes, au contraire, l'isolement des astres, leurs grandes distances mutuelles, la résistance nulle (ou peut-être sensiblement nulle) du milieu font que les êtres de raison de la Mécanique et les faits naturels présentent une coïncidence presque parfaite. Il est dès lors compréhensible, et même tout naturel, que les résultats de la Mathématique pure offrent avec les observations une concordance dont n'approche aucune autre catégorie de phénomènes.

C'est de Kepler et surtout de Newton que date la Mécanique céleste. Le premier, après dix-huit ans de patientes observations dont un génie tel que le sien pouvait seul tirer profit, découvre les lois suivant lesquelles se déplacent les astres composant notre système solaire. Le second, partant de ces lois, grâce à une intuition merveilleuse servie par un génie mathématique incomparable, montre que ces lois sont elles-mêmes la conséquence d'une autre loi — ou, si l'on veut, d'une hypothèse — unique. Il ramène ainsi des phénomènes plus ou moins complexes à un phénomène plus simple : celui de la *gravitation* ou *attraction universelle*.

La Mécanique céleste est donc fondée, au moins en ce qui concerne les planètes et leurs satellites, seuls corps célestes auxquels soient applicables les observations dont nous parlons ici. A partir de cet instant, il semble que tout soit dit. Les planètes décrivent régulièrement des orbites elliptiques autour du Soleil ; autour d'elles, et entraînés par elles, les satellites circulent suivant des lois pareilles. Les masses de tous ces corps ont été calculées; on sait à tout instant, dans l'avenir aussi bien que dans le passé, quelle position chacun d'eux occupera dans l'espace par rapport au Soleil ; les phénomènes tels que les éclipses, les passages de la planète Vénus sur le Soleil, les phases de la Lune, par exemple, sont prédits de façon précise. On pourrait croire qu'il n'y a plus de place que pour l'Astronomie d'observation, dont le rôle se bornera à une simple vérification permanente, et pour ainsi dire inutile, des résultats obtenus par le raisonnement et le calcul.

Il n'en est rien pourtant, et la voie qui doit être parcourue par les Laplace et les Le Verrier reste largement ouverte. Sans parler des mouvements de rotation de chaque astre sur lui-même, mouvements qui donnent lieu à de difficiles problèmes de Mécanique, et en continuant à considérer chaque astre comme un point matériel, il faut remarquer en effet qu'en vertu de la loi de la gravitation tous ces astres exercent eux-mêmes des actions les uns sur les autres. Les étoiles fixes, de leur côté, exercent aussi des attractions; par conséquent, ce ne seront plus des ellipses rigoureuses que décriront les planètes; chacune des trajectoires, par rapport à l'ellipse mathématique idéale, présentera des différences plus ou moins appréciables; les mouvements prévus et prédits subiront des *perturbations*. C'est ce que les observations ont confirmé; et l'étude de ces perturbations est et restera longtemps l'un des chapitres importants de la Mécanique céleste, sans parler des comètes, des mouvements de rotation, de l'Astronomie stellaire, du mouvement d'ensemble du système solaire, etc.

Si les perturbations sont faibles, cela tient à plusieurs causes : d'abord, le Soleil a une masse considérable par rapport à celle de chacune des planètes, et même de toutes les planètes réunies; en second lieu, les orbites elliptiques, qui n'appartiennent pas à un même plan, sont dans des plans qui ne présentent les uns sur les autres que de faibles inclinaisons; un fait analogue a lieu pour les satellites: les planètes sont assez éloignées les unes des autres pour que leurs actions mutuelles soient réduites; enfin, si quelques-unes des étoiles fixes ont très probablement des masses formidables, souvent supérieures de beaucoup à celle du Soleil, les distances énormes qui les séparent du système solaire rendent quand même l'effet de leur attraction négligeable. Tout cela réduit à peu de chose les perturbations, mais ne les supprime pas; le problème mécanique rigoureux est donc fort loin d'avoir une solution et, pour se faire une idée de la difficulté qu'il présente, il suffit de rappeler ceci : en supposant seulement trois points matériels de masses connues, s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton, la détermination de leurs mouvements est un problème (célèbre sous le nom de *problème des trois corps*) sûrement insoluble par les moyens

ordinaires que fournit le calcul intégral. Des centaines, peut-être des milliers de Mémoires ont traité cette question; les plus grands géomètres l'ont abordée, et cependant c'est à peine si elle a fait quelques progrès; en tout cas, elle n'a été résolue rigoureusement que dans quelques cas particuliers.

Si le problème des perturbations reste théoriquement insoluble, on pourrait se demander s'il en résulte une lacune réelle dans la science concrète, c'est-à-dire si les perturbations ne rentreraient pas dans la catégorie des grandeurs négligeables, inférieures aux limites des erreurs admissibles. Il n'en est rien; et c'est pour cela que bientôt les observations vinrent révéler les discordances entre les résultats annoncés et ceux que l'on constatait, et provoquèrent ainsi de nouvelles recherches théoriques. A défaut de solution absolue, l'Astronomie a été dotée de méthodes qui permettent de pousser très loin, aussi loin même qu'on le veut, le calcul des perturbations; on n'ignore pas non plus, dans cet ordre d'idées, l'histoire de la découverte de la planète Le Verrier par le calcul.

La Science, dans cette direction, est appelée à un progrès indéfini. A mesure que les instruments se perfectionnent, on arrive dans les observations à mesurer les grandeurs avec une approximation qui croît sans cesse. Si loin que soit poussée celle qu'a fournie la Science pure, l'observation viendra donc révéler, à un certain instant, des discordances avec la théorie, et en exiger l'explication; la théorie progressera, ajoutera un terme nouveau à sa série, et ainsi de suite.

A ce sujet, une remarque s'impose, en raison même de son caractère paradoxal : Kepler, cherchant par l'observation les lois des mouvements des planètes, trouva en particulier qu'elles décrivent des ellipses dont un des foyers est le Soleil (ou le centre du Soleil). Il n'avait à sa disposition que des instruments relativement grossiers, ou plutôt qui nous paraîtraient tels aujourd'hui. Supposons, au contraire, que dès cette époque il eût été en possession de l'outillage le plus parfait et le plus complet de l'un de nos observatoires modernes; que fût-il arrivé? A cause même de son admirable talent d'observation, du soin et de la patience qu'il apportait à ses travaux, les perturbations qui lui ont échappé se se-

raient révélées; mais, étant révélées de la sorte, en superposition avec le mouvement elliptique qu'on ne connaissait pas préalablement, on n'aurait eu comme résultat qu'une trajectoire indéfinissable; et la sanction de tant d'efforts par un observateur de génie aurait été, à la place des trois admirables lois de Kepler, une vérité telle que celle-ci : « Les planètes, dans leurs mouvements autour du Soleil, décrivent des orbites très compliquées, qui ne sont pas planes, et cela suivant des lois que l'Algèbre ne saurait traduire. » Il est supposable que cela n'aurait pas suffi à Newton pour le conduire à la découverte de l'attraction universelle.

Donc, dans certaines conditions, le trop grand progrès des moyens d'observation peut être un obstacle au progrès de la Science, un empêchement à la découverte des lois de la nature. Ce qu'il faut, c'est que ces moyens matériels soient en harmonie avec l'état général d'avancement des connaissances correspondantes. Le progrès scientifique ne se fait en somme que sous la forme d'approximations successives; et surtout lorsque des faits observés il s'agit de remonter à des phénomènes plus généraux, il est souvent à désirer que les observations ne soient pas trop approchées, c'est-à-dire qu'elles ne reflètent pas l'influence des causes accessoires de complications, venant se superposer au phénomène principal, et rendant impossible l'étude mathématique.

Dès que de la Mécanique rationnelle on essaie de tirer des conclusions concrètes, on fait par cela même de la *Mécanique appliquée*. Cette appellation est donc très générale et comprend notamment la Mécanique céleste, dont nous venons de parler.

La Mécanique appliquée se subdivisera en un nombre considérable de branches secondaires, et ce nombre peut être appelé à s'accroître encore chaque jour. Parmi elles, l'une des plus importantes est la *Mécanique industrielle,* qui concerne plus spécialement l'étude des *machines,* de leur fonctionnement et de leur construction. C'est à Poncelet qu'on doit attribuer le mérite des plus grands progrès accomplis en Mécanique industrielle, progrès qui ont réagi de la façon la plus heureuse sur le développement industriel lui-même.

Une machine est en général un assemblage de corps des-

tiné à transmettre l'action de forces, et à produire ainsi du travail mécanique sous la forme la plus commodément utilisable pour le but que l'on poursuit. Ce résultat s'obtient par des dispositions très diverses et en particulier par des transformations de mouvements, qui donnent lieu à l'étude des *mécanismes,* et à la considération des machines à un point de vue exclusivement cinématique. Cette étude cinématique dans certains cas exceptionnels, comme dans l'horlogerie, par exemple, entre pour la presque totalité dans la théorie des machines. Cela arrive lorsque les forces à mettre en jeu sont tellement faibles que l'économie de force ne présente aucun intérêt; la question mouvement est capitale, et la question travail se réduit pour ainsi dire à rien.

Mais en général il n'en est point ainsi, et l'on se trouve en présence de conditions exactement contraires. L'économie de la force est essentielle; et, toutes choses égales d'ailleurs, la meilleure machine sera celle qui avec une force déterminée produira le plus de travail, ou, ce qui revient au même, produira un travail donné avec le moins de force. Nous ne saurions entrer ici dans la moindre considération particulière sur l'établissement des machines, qui se subdivisent à l'infini et sont généralement classées suivant la nature de la force que l'on emploie. Mais il nous semble indispensable de présenter à ce sujet quelques observations d'un ordre absolument général.

Il faut d'abord bien remarquer que la Mécanique industrielle, s'appliquant à des corps naturels et poursuivant la solution de questions pratiques, doit avoir recours, sous peine de mécomptes, non seulement à la Mécanique rationnelle, mais encore à la Physique, à la Chimie, à toutes les sciences de nature à corriger la distance entre les abstractions et les réalités, en fournissant sur celles-ci des indications complémentaires. La théorie des machines devient donc beaucoup plus complexe qu'on n'aurait pu l'imaginer, si on veut la traiter avec une certaine rigueur, et dans des conditions permettant d'en déduire des résultats pratiques.

Une machine comprend essentiellement trois parties : *le récepteur, les transmissions* et *l'outil.* Le récepteur puise en quelque sorte, dans la source de force naturelle quelconque

qu'il s'agit d'utiliser, et emploie cette force dont on s'est emparé pour produire un certain mouvement. Les transmissions transforment ce mouvement et finissent par produire ainsi celui qui convient à la marche de l'outil. En toute machine, l'élément essentiel qui mérite de fixer l'attention, c'est le travail ou la force vive, dont les définitions sont données et dont l'identité est démontrée dans la Mécanique rationnelle, pour les systèmes de points matériels. Par l'utilisation d'une force déterminée, quelle qu'en soit la source, une machine absorbe donc une certaine somme de force vive; elle transmet cette force vive jusqu'à l'outil, où l'on finit par la retrouver sous forme de travail. C'est ainsi du moins que les choses se passeraient si les résistances des organes, la raideur des liens flexibles, les chocs, les vibrations et d'autres causes nombreuses encore, ne représentaient une certaine perte de force vive employée à produire inutilement ces divers effets, et qu'on ne saurait retrouver, par conséquent, dans l'outil, c'est-à-dire sous forme de *travail utile*. La somme de force vive absorbée par le récepteur correspondant juste à ce qu'on nomme le *travail moteur*, il suit de là que le travail utile est toujours inférieur au travail moteur. Le rapport de ces deux grandeurs constitue le *rendement*. L'utopie des chercheurs de mouvement perpétuel consiste, au fond, dans la conception d'une machine dont le rendement serait supérieur à l'unité, ce qui est radicalement impossible. Autant vaudrait imaginer un moulin qui, recevant 9^{kg} de blé, rendrait en échange 10^{kg} de farine.

Les théories de la Physique moderne ont établi que l'on pouvait affirmer une équivalence remarquable entre deux grandeurs dont les apparences sont cependant bien différentes : la chaleur et le travail mécanique. De là à conclure que la chaleur ne consiste qu'en un cas particulier de mouvement des molécules à l'intérieur des corps, la pente était naturelle; ce n'est toutefois qu'une théorie, ou une hypothèse; mais cette hypothèse rationnelle a produit de beaux et utiles résultats.

Allant plus loin encore, on est arrivé à la théorie de l'*énergie*, en désignant sous ce nom plus général une qualité inhérente à la matière et qui se retrouve sous une foule

d'aspects divers et de manifestations multiples : force vive, chaleur, phénomènes électriques, etc.; les phénomènes caloriques ayant cependant une prépondérance accentuée. Sur ces bases, on a établi la grande vérité naturelle connue sous le nom de *conservation de l'énergie;* revenant aux machines, on peut dire qu'une machine est un *transformateur d'énergie.* Ces vues générales ont été de nature à jeter quelques clartés philosophiques sur des sujets compliqués lorsqu'on les considère isolément; elles montrent, en tout cas, que les lacunes que peut présenter encore la théorie de telle ou telle catégorie de machines sont intimement liées à tel ou tel chapitre de la Physique. Par exemple, l'étude des machines à vapeur, et plus généralement des moteurs thermiques, ne peut attendre de perfectionnements que de la Thermodynamique.

Sur l'étude générale des machines viennent se greffer certains chapitres spéciaux, comme ceux qui ont pour objet les freins, les volants, les régulateurs, par exemple. Il suffit de les mentionner.

Ce n'est pas seulement à la Mécanique industrielle que la Mécanique rationnelle vient s'appliquer. Elle rend des services dans l'étude de tous les phénomènes où interviennent les forces ou les mouvements, en dehors des machines proprement dites. C'est dire que l'art de l'Ingénieur n'est autre chose qu'une continuelle application de la Mécanique.

Dans les constructions notamment, il importe au plus haut point d'étudier les conditions de stabilité, c'est-à-dire d'empêcher pratiquement les mouvements de se produire. La stabilité des voûtes, celle des murs de soutènement, les problèmes concernant les ponts suspendus offrent des exemples curieux de ce genre de questions.

Il faut aussi y rattacher le chapitre si important, et obscur encore sur certains points, que constitue la *Résistance des matériaux*. Mais, ici encore, l'expérience devient indispensable, on est dans un domaine qui relève à la fois de la Physique et de la Mécanique, et ce serait une erreur de croire que les problèmes de résistance des matériaux puissent être utilement traités par le secours de la théorie pure.

Il est un genre de questions où l'étude des mouvements et

du jeu des forces présente un caractère tout spécial : ce sont celles qui concernent les fluides; grâce à des hypothèses purement gratuites, et tout à fait analogues à celle qui nous fournit le point matériel, on a pu imaginer des fluides idéaux, gaz ou liquides, permettant de faire rentrer dans la Science pure l'étude des phénomènes dont il s'agit, ce qui donne lieu à l'*Hydrostatique* et à l'*Hydrodynamique*.

Mais, aussitôt qu'on veut essayer de tirer parti des résultats ainsi obtenus, c'est-à-dire passer à l'*Hydraulique*, il est nécessaire de rectifier ces conceptions premières, de les corriger en y apportant des données nouvelles, fournies directement par l'expérience ou par les théories physiques qui paraissent le mieux s'adapter à l'ensemble des phénomènes observés. Le régime des cours d'eau, les barrages, les distributions d'eau dans les villes, les canaux, et bien d'autres sujets encore, sont des applications de l'Hydraulique.

Les constructions navales soulèvent à la fois des questions d'Hydraulique et de Mécanique appliquée sous toutes les formes, surtout avec l'importance qu'a prise de nos jours la navigation à vapeur.

Rien que par ces brèves indications, on se rend compte de l'étendue des services que rend la Mécanique rationnelle, aidée par l'ensemble des autres sciences. Elle est insuffisante, évidemment, car les hypothèses sur lesquelles on l'a édifiée sont généralement trop éloignées de la réalité pour que les résultats fournis présentent l'approximation dont on a besoin. Mais, sans son secours, les sciences d'application dont nous avons parlé n'existeraient pas; et du reste, si grossière qu'elle soit, la première approximation fournie par la théorie n'en constitue pas moins une indication des plus utiles.

ENSEIGNEMENT.

CHAPITRE I.

VUE GÉNÉRALE SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE.

Dans toute cette dernière partie, mon intention est de présenter des idées générales plutôt qu'une étude détaillée des méthodes d'enseignement, ou une critique approfondie de ces méthodes. Cependant, il est assez difficile parfois de faire comprendre ce qu'on juge raisonnable, sans rapprocher sa thèse de la réalité des faits, afin d'attirer l'attention sur les points qui paraissent plus particulièrement perfectibles. Dans d'autres circonstances, l'indication de ces faits a son utilité comme exemple, et en dehors de toute pensée de discussion.

Dans ces divers cas, c'est surtout à l'enseignement français que j'emprunterai les matériaux qui pourraient m'être nécessaires. J'ai pour cela une raison péremptoire : c'est qu'en matière mathématique, je crois le connaître assez bien, tandis que je suis beaucoup moins au courant de la question en ce qui concerne les autres pays. Mon but serait d'essayer de semer quelques idées justes dont profiteront, s'ils le veulent, ceux qui sont à même de le faire. Je n'ai pas l'ambition de formuler un plan général de réforme de l'enseignement mathématique ; moins encore de préparer une sorte de manuel pédagogique.

Ces explications préliminaires étaient utiles pour éviter toute équivoque et pour préciser à l'avance ma pensée dans la limite où il m'est possible de le faire.

Dire que l'enseignement mathématique est utile, c'est assurément une banalité. Cependant, une question se pose dès le début : convient-il de distribuer à tous cet enseignement, ou bien d'opérer une sélection ? N'y a-t-il pas des aptitudes spéciales nécessaires pour réussir dans l'étude de la Science mathématique et y faire quelque progrès ? Ne rencontre-t-on pas un grand nombre d'enfants ou de jeunes gens, d'ailleurs bien doués, qui manquent de dispositions naturelles au point de vue qui nous occupe, et dès lors faut-il leur imposer des études dont ils ne sauraient profiter ? Il n'est pas rare de rencontrer des hommes instruits et distingués pour déclarer, parfois avec une légère affectation, qu'ils ont toujours manifesté pour les études mathématiques une aversion profonde, et qu'aucune des notions de cette nature qui leur furent enseignées jadis n'est restée dans leur esprit. J'imagine que dans ces propos il entre souvent un peu d'exagération, même lorsqu'ils sont absolument sincères ; il nous est bien difficile de savoir au juste ce qu'a gagné notre cerveau, ce qui s'y est nettement gravé, dans quelle mesure il a profité des études de notre jeunesse. C'est un appareil enregistreur tellement complexe que la question est insoluble sous cette forme. Notre état mental et intellectuel présent est une résultante générale, et personne ne peut savoir avec quelque certitude ce qu'il serait, dans le cas où l'on aurait supprimé telles ou telles parties des impressions qu'il reçut autrefois.

Aussi je ne m'arrête pas plus longtemps à l'objection ainsi proposée, et je me borne à énoncer deux axiomes qui me paraissent vérifiés par une saine observation des faits :

1° Dans le milieu actuel, des notions mathématiques sont nécessaires à tous ;

2° Chaque intelligence moyenne est apte à acquérir ces notions, restreintes à de certaines limites.

Se demander si un enfant a des dispositions pour la Mathématique équivaut à se demander s'il en a pour l'écriture et la lecture. Quelques-uns restent totalement illettrés par faiblesse d'esprit ; quelques-uns pourront aussi se refuser à recevoir aucune notion mathématique. C'est là une infirmité individuelle.

Si l'on posait cette question : » Tout enfant est-il apte à devenir un mathématicien ? » ou seulement : « Peut-il apprendre la série générale des branches de la Mathématique composant l'enseignement complet ? » la réponse devrait être toute contraire. Pour continuer à cultiver la Mathématique après les études terminées et en dehors des nécessités professionnelles, un goût spécial est nécessaire, et tout le monde ne l'a certainement pas. Pour pousser ses études dans cette direction, il est bon de s'y sentir porté naturellement, bien que souvent le travail voulu et soutenu vienne suppléer aux aptitudes naturelles, ou plutôt révéler ces aptitudes qu'on ne soupçonnait pas.

En France, le nombre est trop grand des enfants qui ont été inconsidérément lancés vers des études pour lesquelles ils manquaient de dispositions naturelles. Un petit succès de collège, un modeste prix de Géométrie ou d'Arithmétique, suffit quelquefois, la vanité familiale aidant, pour fausser une vocation. On attribue à des facultés exceptionnelles ce qui est le résultat d'un bon travail moyen, et l'on dirige sur l'École Polytechnique ou l'École Normale un malheureux candidat de plus, qui échoue malgré tous ses efforts, et qui aurait sans doute fait le plus honorable des commerçants ou des agriculteurs.

On voit, en résumé, quelle est notre conclusion. De l'aptitude naturelle, aucun compte à tenir s'il s'agit de l'étude des éléments ; le plus grand compte, au contraire, s'il est question de pousser plus haut, et surtout d'affronter des concours difficiles.

Mais, en dehors de la difficulté de bien apprécier les aptitudes naturelles, ce qui exige du jugement et une longue observation, on est en droit de se demander quelle est la limite ainsi tracée ; où s'arrêtent ce que nous appelons les *éléments*. Je crois qu'on pourrait sans inconvénient grouper sous ce titre, sans que cela ait rien d'absolu, ce que contiennent les programmes de l'ancien baccalauréat ès sciences, complétés par les notions qu'on a introduites avec juste raison dans l'enseignement secondaire moderne, et par quelques vues rapides sur la Géométrie moderne, qui manquent à trop de jeunes gens. Cela ne veut pas dire que tous les

enfants devront acquérir l'ensemble de ces notions élémentaires; ils le peuvent tous en vertu de leurs facultés naturelles; mais, malheureusement, les nécessités de la vie obligeront un grand nombre d'entre eux à interrompre prématurément le cours de leurs études. Je dirai sommairement, dans le dernier Chapitre, comment, à mon avis, devra être compris pour ceux-là l'enseignement mathématique.

Il n'y a pas, je le crois, plusieurs méthodes d'enseignement, si nous entendons par enseignement l'ensemble des efforts par lesquels on cherche à meubler de certaines connaissances le cerveau d'un être humain qui n'est pas à son entier degré de développement. La haute Mathématique, dont les connaissances sont répandues par des cours publics de facultés ou d'universités, exposées devant des hommes déjà instruits, échappe donc à notre observation actuelle, sinon à toute règle.

Mais, en restant dans le domaine de l'enseignement élémentaire, depuis les premières notions du calcul arithmétique jusqu'aux théories de la Géométrie analytique, le problème est éternellement le même : intéresser l'élève, le provoquer à la recherche, lui donner sans cesse le sentiment (l'illusion, si l'on veut) qu'il découvre lui-même ce qui lui est enseigné.

On m'objectera que de tels préceptes sont plus faciles à formuler qu'à mettre en application ; sans en disconvenir, je crois cependant qu'il ne faudrait pas s'exagérer les obstacles, et renoncer d'avance à la tâche parce qu'on ne se croit pas de force à la mener à bien. Il faut, pour la réussite, un certain nombre de conditions : la première, et la plus importante, c'est, de la part du professeur quel qu'il soit, le goût et l'amour de l'enseignement ; s'il fait sa besogne par obligation de situation, ou même par devoir et conscience, la partie est perdue avant d'être entreprise ; le double courant nécessaire à tout progrès ne s'établira pas ; son esprit pourra bien aller vers ses élèves, l'esprit de ses élèves n'ira pas vers lui.

En second lieu, le nombre des élèves joue aussi un rôle important ; si l'effectif d'une classe dépasse une certaine limite, variable suivant les degrés de l'enseignement, il n'y a plus d'élèves, ni de professeur ; il y a un troupeau et un

chien de berger : d'ailleurs, soit dit en passant, tout professeur contraint à faire de la discipline est condamné par cela même à l'impuissance. D'autre part, on a souvent déclaré que, si une classe a un effectif trop restreint, l'enseignement en souffre, faute d'émulation ; je crois fort peu pour mon compte à la nécessité de cette émulation en matière mathématique, et l'idéal, à mes yeux, serait un professeur par élève ; il est d'ailleurs évident que, dans l'enseignement ordinaire, la réunion s'impose, mais il est bon, encore une fois, qu'elle ne dépasse pas des limites raisonnables.

Il faut aussi que ce groupe, qu'on appelle une *classe*, présente une assez grande homogénéité. Sinon, l'instituteur est contraint de mesurer son enseignement sur les forts ou sur les faibles. Dans le premier cas, le découragement se produit chez ces derniers ; ne pouvant plus suivre, ils désespèrent d'eux-mêmes ; dans le second, c'est la tête de classe qui se trouve sacrifiée.

Les conditions normales dont nous venons de parler étant supposées remplies, il est une recommandation indispensable à faire à tout professeur. C'est, sauf de très rares exceptions, de ne pas perdre de vue qu'une science pure, au point de vue dont nous nous occupons, n'est jamais une science complète. Il suit de là que toute instruction rationnelle doit contenir, à côté des éléments eux-mêmes, des applications continuelles, dans une mesure assez discrète, mais adaptées le mieux possible aux théories. Le but de ces applications est double : tout d'abord présenter à l'élève des exercices sans lesquels une science n'est jamais vraiment assimilée ; et puis, ce qui est plus important encore, fournir des occasions continuelles de rapprocher le concret de l'abstrait, de montrer comment on peut revenir de celui-ci à celui-là, ce qui est le but définitif de la Science en général.

Et ce n'est pas par hasard ou par occasion seulement qu'il faudrait montrer ce rapprochement, et attirer l'attention sur les abstractions qui servent de base à la Science pure : c'est sans cesse que le côté philosophique devrait être la grande préoccupation ; et cela, dans toutes les classes, à tous les degrés, sur tous les sujets. Les vérités générales, exposées

avec une certaine habileté, mises à la portée de ceux auxquels on les présente, ont toujours un intérêt et exercent un attrait. Attirer l'attention des commençants, même des jeunes enfants, sur ces vérités-là, et les en bien pénétrer, c'est l'un des moyens les plus sûrs de leur éviter des difficultés dans le développement ultérieur de leurs études.

Il est dans chaque Science, et pour ainsi dire dans chaque Chapitre de la Science, des propositions très générales et d'un grand intérêt, en raison du nombre considérable de conséquences qui en découlent ou d'applications diverses auxquelles elles se prêtent. A ces propositions-là, un soin tout particulier doit être apporté ; il faut les mettre en vedette, les signaler, prévenir d'avance qu'on est destiné à les revoir ; et, lorsqu'on les reverra, sous dix formes, sous vingt formes différentes, ce ne sera plus alors une étude nouvelle à recommencer chaque fois, comme cela arrive trop souvent ; l'élève reconnaîtra sans peine une vieille connaissance qui se présente seulement à lui avec une toilette nouvelle, et sa mémoire ne se soumettra pas à une torture inutile.

Du reste, le rôle de la mémoire, certainement nécessaire en matière mathématique comme en toute autre, doit être réduit à d'assez faibles proportions dans un enseignement rationnel. Ce ne sont pas les images, figures ou formules, dont il faut surtout laisser l'empreinte dans le cerveau ; c'est la faculté du raisonnement ; et, si un élève a appris une proposition importante en y étant conduit de telle sorte qu'il l'a pour ainsi dire découverte lui-même, cette proposition sera facilement retrouvée par lui, dans le cas où il viendrait à l'oublier, car son esprit repassera sans peine par les mêmes sentiers qui l'avaient amené au but une première fois.

En un mot, c'est surtout par l'initiative personnelle que peut se faire d'une façon normale le développement de l'esprit mathématique ; initiative chez le maître, initiative chez l'élève. Le premier, il faut le reconnaître, en est souvent empêché par l'exiguïté et la raideur des programmes ; le second, de son côté, n'a généralement pas d'initiative parce qu'on ne lui en a pas communiqué le goût. Il a été exercé à travailler, à apprendre, très peu à comprendre, et pas du tout à chercher. Dans des classes peu nombreuses, composées

de jeunes gens se destinant aux écoles et désireux de réussir, il est parfois arrivé que les appels réitérés d'un professeur, tendant à obtenir de ses élèves des demandes personnelles de renseignements, sont restés pour ainsi dire sans effet. C'est que, bons élèves du reste, se donnant de la peine, ces jeunes gens, depuis leur enfance, avaient été dressés, en matière mathématique, à apprendre toujours, et jamais à penser.

Les moyens matériels, les procédés pédagogiques à mettre en œuvre pour obtenir le résultat désiré sont éminemment variables, suivant la nature des classes, l'avancement des élèves, et aussi d'après la manière de voir et le tempérament du professeur. Nous en examinerons tout à l'heure quelques-uns parmi les principaux ; mais nous tenons à insister dès maintenant sur cette proposition que, dans toutes les circonstances, rien ne peut suppléer à l'enseignement oral spontané, c'est-à-dire aux explications données à haute voix avec toute la méthode et la clarté qu'un esprit juste et une longue expérience permettent d'acquérir. Il faut en outre que fréquemment les élèves eux-mêmes, à tour de rôle, soient appelés à présenter des démonstrations ou à chercher des solutions de problèmes, autrement que la plume à la main.

Il serait indispensable d'introduire, surtout dans l'enseignement oral, deux coutumes qui semblent exiger du temps, mais qui plutôt en font gagner. Une seule est en vigueur, et encore dans une mesure un peu exceptionnelle. Je veux parler de leçons d'introduction et de revision. Ces dernières seules sont appliquées, sous une forme ou sous une autre, dans quelques classes. Comme le nom l'indique, ces leçons devraient avoir pour but, une fois le cours terminé, ou mieux peut-être après chaque branche importante étudiée, de rappeler à grands traits le chemin parcouru, de montrer d'où l'on est parti, où l'on est arrivé, quelles sont les applications principales et les propositions les plus essentielles par lesquelles on est passé, laissant les autres dans une ombre relative. Lorsque la chose est possible, ce travail de revision, accompli par les élèves eux-mêmes avec un temps de prépation suffisant, peut donner d'excellents résultats, en obli-

geant les enfants à rassembler leurs idées, à les exposer clairement, sauf à s'aider au besoin de quelques notes, au lieu de répéter purement et simplement des leçons apprises à grand renfort de mémoire. Bien entendu, le professeur intervient alors pour corriger ce qui est défectueux, ou pour présenter des remarques complémentaires.

Quant à l'innovation des introductions, elle ne pourrait, au contraire, se pratiquer qu'en étant présentée par les professeurs eux-mêmes, et voici quel en serait l'objet. Avant d'aborder chaque Chapitre un peu important, on exposerait sous une forme résumée quel en est l'objet essentiel, pourquoi ce chapitre présente un intérêt, dans quelles circonstances on pourra avoir à en faire application et comment on se propose d'accomplir l'exploration que l'on a en vue. La route étant ainsi jalonnée d'avance, la compréhension des choses sera plus naturelle, l'esprit d'initiative et de recherche s'ouvrira plus facilement, tandis que souvent des esprits, même bien doués, ne peuvent surmonter certaines difficultés ni comprendre certains théorèmes, parce qu'ils marchent comme dans la nuit, sans fil conducteur, sans pouvoir deviner le lien qui existe entre les propositions successives qu'on fait passer sous leurs yeux. Cette pratique des leçons, ou mieux des fragments de leçons d'introduction, serait utilement introduite dans tous les ordres d'enseignement, mais aurait surtout un intérêt spécial quand le niveau commence un peu à s'élever, et que les complications apparentes de la Science peuvent masquer, dans des esprits n'ayant pas encore une préparation intellectuelle suffisante, la grande clarté et l'unité que la Mathématique présente dans toutes ses parties.

En résumé, l'enseignement doit être aussi peu dogmatique que possible, mais en même temps foncièrement philosophique. Cette conciliation de la simplicité dans la forme avec la profondeur des idées constitue l'une des qualités de l'art difficile de l'enseignement. Les introductions peuvent aider, dans une très large mesure, à suppléer à cette qualité maîtresse, et contribuer même à la faire acquérir.

Dans les classes un peu élevées, on emploie beaucoup, aujourd'hui, le système des notes prises sur des cahiers par

les élèves tandis que le professeur expose chacune de ses leçons. Ce système en soi est excellent, mais exige pour être bien pratiqué un certain apprentissage, l'habitude d'une écriture rapide et claire, et une maturité relative de l'esprit; et ce serait peut-être un tort de l'employer trop exclusivement. Dans les classes d'élèves tout jeunes, il serait certainement impraticable comme procédé unique. Du reste, en ces matières, l'esprit d'exclusivisme et de système est déplorable ; c'est par des essais partiels discrètement tentés qu'un professeur digne de ce titre arrive à perfectionner sans cesse son outillage pédagogique.

Je ne parlerai ici ni des devoirs écrits, ni des compositions plus ou moins fréquentes qu'on peut donner aux élèves, ni des interrogations à leur faire subir en dehors des leçons. Tous ces accessoires de l'enseignement sont bons, sont même excellents à tous les degrés, pourvu que l'ensemble de ces moyens divers soit bien harmonieusement combiné.

Au lieu de notes prises au cours, un certain nombre de professeurs avaient, pendant d'assez longues années, adopté l'usage — qui n'est peut-être pas encore proscrit partout — de dicter textuellement un cours que les élèves devaient reproduire. Rien n'est plus formellement contraire à l'esprit de l'enseignement mathématique. Cette manière rigide de présenter les vérités dont se compose la science est de nature à solliciter sans cesse les facultés de la mémoire, au préjudice de celles du raisonnement, et c'est justement le résultat contraire qu'il faudrait obtenir.

La forme sous laquelle on peut faire garder aux élèves, dans les commencements surtout, des traces sensibles de ce qui leur a été enseigné, est assez difficile à trouver d'une façon générale; je crois cependant que des rédactions bien suivies, bien coordonnées et rectifiées par le maître, seraient incontestablement supérieures à ces cahiers dictés, constituant le pire des systèmes. Ajoutons que l'enfant doit être préparé le plus tôt possible à l'art de prendre des notes, et qu'on peut l'y amener graduellement en lui faisant justement exécuter ses rédactions sur les notes qu'il a prises lui-même.

Autrefois, au lieu de cahiers dictés, on avait un autre sys-

tème, peu recommandable encore, mais cependant moins mauvais : c'était l'étude d'un livre ; ce livre, adopté pour une classe, faisait le fond de l'enseignement ; chaque jour on en découpait une petite tranche, et le rôle du professeur se bornait pour ainsi dire à un simple commentaire. Je ne m'arrêterai pas à ce système abandonné, et plus impraticable que jamais avec l'essor des publications classiques. S'il y a beaucoup de bons livres, il n'y en a aucun de parfait, et le système en question n'est évidemment pas soutenable ; mais il est permis à ce propos de se demander quel rôle les livres doivent jouer dans l'enseignement mathématique et quel secours ils peuvent apporter. Or, il semble qu'en général les choses soient organisées juste au rebours de ce qu'indique la raison. Dans les classes inférieures, pour la première initiation, l'intervention du livre est bien rarement utile ; l'enseignement doit être vivant, varié, familier, exciter incessamment l'attention ; et la parole figée dans un livre produit exactement l'effet contraire. C'est donc là que le livre devrait être tout au plus réduit au rôle de très humble auxiliaire d'occasion ; et c'est là justement qu'il règne d'une façon quasi souveraine.

Dans les classes relativement élevées, au contraire, les notes du cours, telles qu'elles ont été prises, forment le recueil sur lequel on travaille ; mais des erreurs ont été commises, des lacunes subsistent ; il y a des aperçus sommaires qui ont été donnés sur des sujets qu'un élève studieux serait heureux de connaître plus complètement. Des livres seraient donc utiles comme recueils de renseignements complémentaires. Il n'est certes pas défendu d'en faire usage ; mais, dans les classes dont je parle, et qui préparent habituellement aux grandes Écoles, le surchauffage des candidats est tellement bien organisé que l'usage des livres se réduit à peu près à rien, par cette bonne raison que les élèves n'ont pas le temps. Pour le succès dans les concours, il peut être bon que les choses se passent ainsi ; pour l'éducation mathématique de l'esprit, c'est déplorable. On pourrait dire que nos candidats sont prodigieusement instruits ; ils savent tant de choses qu'ils n'ont pas le temps d'en comprendre aucune. Le délaissement des livres dans les classes mathématiques un peu supérieures n'a pas d'autre cause ; et de ce fait on ne peut

guère blâmer personne ; c'est la fatalité même de l'organisation des concours qui amène ces résultats. On pourrait cependant les atténuer.

Une autre calamité, à laquelle il serait plus facile de remédier, est la mobilité, l'inconsistance des programmes de concours, variant d'une année à l'autre, bouleversant tout, faisant des coupes sombres à travers la science, pour y ajouter le lendemain une théorie plus ou moins difficile qui y figurait la veille ; tout cela sans suite, sans méthode, sans raisons données, souvent sans prétexte.

Un programme est toujours mauvais, uniquement parce que c'est un programme. Mais, comme c'est un mal nécessaire, il faudrait du moins, lorsqu'on a eu la chance d'obtenir le minimum d'inconvénients, en rester là et ne plus toucher à ce programme idéal qu'avec une discrétion extrême et quand des raisons scientifiques y obligent impérieusement. Avec un peu de bonne volonté, il ne serait pas difficile d'en revenir là.

Une autre espèce de programmes, n'ayant d'ailleurs de commun que le nom avec ceux dont nous venons de parler, c'est celle des programmes trop souvent imposés aux professeurs de l'enseignement public avec une minutie manifestement exagérée. C'est de la sorte que chez un trop grand nombre d'entre eux se trouve amoindri, sinon détruit, cet esprit d'initiative sans lequel l'enseignement perd toute vie et toute flamme. Des indications générales très larges seraient bien suffisantes.

Si, malgré toutes ces entraves et tant de défauts de détail, nous obtenons encore en France les petits résultats que nous pouvons constater, cela révèle les belles qualités de conscience, de zèle et d'instruction qui distinguent à un si haut degré le corps enseignant. Mais on s'attriste quand même en pensant à tant de force perdue ; et l'on regrette de ne pas voir toute cette enfance et cette jeunesse française recevoir dans la mesure où c'est possible la forte et solide éducation mathématique qu'il serait si facile de lui donner en se décidant tout simplement à laisser agir les forces bienfaisantes dont on dispose ; on ferait circuler la vie dans une région où elle semble suspendue. Peut-être, s'il en était ainsi, aurait-on

de la Mathématique une appréciation générale un peu moins inexacte.

Il me resterait encore bien des questions à indiquer, sur la fréquence et la durée des leçons, notamment, et sur l'âge auquel peut être efficacement entreprise l'éducation mathématique. Les opinions sont variables sur ces divers points, et toute opinion absolue risquerait d'être erronée. Il faut bien du reste se plier, suivant les cas, aux nécessités des autres parties de l'enseignement, et aussi aux conditions extérieures, lesquelles ne permettent pas toujours de faire ce qui pourrait sembler théoriquement préférable.

Sur un point cependant, une observation me semble indispensable. Dans quelques classes où se trouvent des commençants, on a imaginé d'introduire des leçons de mathématiques à raison de deux, quelquefois même d'une par semaine. Un pareil procédé est tout à fait irrationnel et représente simplement du temps perdu. Comment veut-on, à de très rares exceptions près, que le cerveau d'un enfant reçoive l'empreinte de ces notions, nouvelles pour lui, et les conserve pendant une aussi longue période ? La continuité est un des facteurs nécessaires de l'enseignement scientifique. Avec la méthode dont nous parlons, l'enfant oublie d'une semaine à l'autre ; ayant oublié, il cesse de prendre le même intérêt à des études auxquelles il serait indispensable de l'attacher chaque jour un peu plus. On peut dire sans crainte de se tromper qu'en Mathématique, trois leçons par semaine représentent un extrême minimum.

CHAPITRE II.

ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMÉTIQUE.

L'Arithmétique, nous l'avons vu précédemment, comprend deux ordres d'idées très distincts, même dans sa partie la plus élémentaire : le calcul et la théorie. Or, s'il est exact que les règles des opérations les plus simples exigent pour être justifiées des raisonnements dont l'exposé n'est pas toujours simple ni facile, la possibilité d'exécuter couramment ces opérations d'une façon pratique n'en existe pas moins. Et comme cette pratique des opérations du calcul arithmétique a un intérêt de premier ordre dans les diverses circonstances de la vie ; comme, d'un autre côté, cette habitude du calcul est l'un des éléments précieux d'une bonne éducation scientifique, on voit combien l'étude de l'Arithmétique est importante puisqu'elle réagira plus tard sur toutes les autres.

Les premières notions du calcul peuvent être utilement données aux enfants, à la même époque où on leur donne les premières notions de lecture et d'écriture. Ce n'est pas, bien entendu, sous une forme abstraite qu'un tel enseignement peut être distribué ; ce n'est pas même par des leçons, mais par de véritables jeux. Les dominos, les lotos, les billes, toutes ces collections concrètes d'objets, permettent d'apprendre à l'enfant à compter, à lui faire opérer sans qu'il s'en doute les abstractions naturelles indispensables. Par la manipulation des objets, il est bientôt initié aux principes de la numération, sans même que ces principes soient formulés ; peu à peu, et sous une direction intelligente, il arrive à faire avec une certaine sûreté les opérations les plus simples ; il commence à écrire les nombres ; il s'exerce au calcul mental, si important pour le développement des facultés arithmétiques. Et dans tous ces exercices, présentés comme des

récréations, le jeune élève trouve un attrait ; sa curiosité s'éveille, il désire aller chaque jour un peu plus loin que la veille.

Un savant de très grand mérite, Édouard Lucas, dont nous avons déjà parlé, s'est vivement intéressé à cette question du premier enseignement de l'Arithmétique. Ce fut, de tous les Français, dans la dernière partie de ce siècle, celui qui connaissait le mieux l'Arithmétique, qui produisit les plus profonds travaux sur la Théorie des nombres, ce qui ne l'empêchait pas de s'attacher avec une sollicitude extrême à ce qui concerne la première initiation au calcul. Dans un très remarquable discours prononcé par lui, en 1885, à la distribution des prix du Lycée Saint-Louis, après avoir développé les idées que je me suis attaché à résumer plus haut, voici comment il s'exprime :

« Il ne faut dans aucun cas que l'écolier apprenne du fait de mémoire des Tables d'addition ou de multiplication, ou des résultats quelconques, sans les avoir obtenus directement ; l'enfant doit les trouver lui-même, car son esprit est une force latente, à laquelle il suffit d'imprimer et de diriger le mouvement. »

Toutes ces idées, comme il le rappelait, sont dans leur essence celles qu'exposait La Chalotais en 1763, dans son *Essai d'éducation nationale ou plan d'études pour la jeunesse*. Mais hélas ! que de progrès il faudrait souvent accomplir pour remonter d'un siècle et plus en arrière ! Et combien est grande la déception quand on compare ce qui devrait être, ce qui pourrait être, et ce qui est ! Cependant, comme les développements que je présente ici ont pour but de provoquer quelques progrès plus importants, je crois qu'il ne faut pas se décourager, et je demande à insister encore.

Voici comment Lucas indique la construction possible d'une Table de multiplication par un enfant. Ayant rangé dans leur ordre les 90 boules d'un jeu de loto, il les retire de 2 en 2, et il obtient ainsi les multiples de 2, c'est-à-dire les nombres qui doivent figurer dans la deuxième colonne de la Table ; puis, replaçant les boules, et recommençant l'opération analogue, mais de 3 en 3, il a les nombres de la troisième colonne, et ainsi de suite.

Il n'est pas difficile d'imaginer des procédés semblables pour les Tables d'addition; ces diverses tables peuvent être poussées beaucoup plus loin qu'on ne le fait d'habitude, et l'enfant qui les a construites ne les oubliera certainement pas. On voit que le papier quadrillé, au point de vue matériel, est appelé à jouer un rôle important dans cette première partie de l'enseignement. C'est une importance qui n'est pas destinée à s'amoindrir à mesure qu'on progresse, car on pourrait presque affirmer que cet outillage est aussi nécessaire à l'auditeur des cours les plus élevés de nos facultés qu'au petit enfant formant pour la première fois ses chiffres. C'est là, je le devine, une assertion et une opinion qui feront sourire plus d'un professeur. Que d'objets d'apparence puérile, cependant, sont appelés à des applications d'une extrême importance! Mieux vaut réfléchir et raisonner que de rejeter sans examen; mieux vaut surtout expérimenter, alors que l'expérience coûte si peu.

J'ai un peu insisté, à dessein, sur l'initiation première; elle doit être entreprise de bonne heure, et poursuivie méthodiquement à mesure que les années s'écoulent, avant que l'on n'aborde l'enseignement scientifique et raisonné. Il est possible, dans cette voie, et en sachant utiliser toutes les occasions qui se présentent, en conservant toujours à la pratique du calcul un caractère récréatif, d'aller beaucoup plus loin qu'on ne pense. Non seulement l'enfant pourra faire avec sûreté les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, non seulement il aura pris du calcul mental une habitude suffisante pour être capable de pratiquer les opérations dans des cas relativement simples sans aucun secours matériel, mais il aura été possible de l'initier aussi, sans même qu'il soit nécessaire d'en prononcer le nom, à bien des calculs sur les progressions, par différence ou par quotient, sur la formation des carrés, sur des exemples simples d'analyse combinatoire, sur les premières puissances d'un binome, qu'on obtient en multipliant simplement le nombre 11 par lui-même, et sur bien d'autres sujets encore. Tout cela semble être du rêve, et je sens bien qu'aux yeux de beaucoup de lecteurs, c'est une thèse paradoxale que je soutiens en parlant ainsi. J'ai cependant la conviction raisonnée — et appuyée sur des faits — que cette thèse est la vérité même, et

que de 4 à 11 ans, par exemple, on pourrait obtenir de l'enfant, dans ce domaine du calcul pratique, des résultats qui nous paraissent prodigieux et qui au fond sont tout naturels. A une condition, cependant : c'est de suivre une méthode rigoureusement expérimentale et de ne pas s'en départir ; de laisser l'enfant, en présence des réalités concrètes qu'il touche et qu'il voit, faire lui-même ses abstractions ; de ne *jamais* essayer de rien lui démontrer ; de se borner à lui fournir les explications qu'il se trouvera conduit à solliciter de lui-même ; de conserver enfin à cet enseignement du calcul une apparence d'amusement, et non pas celle d'un travail imposé. Si la fatigue cérébrale se produit ; si l'on veut contraindre un jeune enfant à fixer son attention sur des sujets qui ne l'intéressent pas et à comprendre des raisonnements au-dessus de son âge, alors le but est manqué, le résultat est... ce que nous avons aujourd'hui, c'est-à-dire une population scolaire sachant mal calculer, pas préparée aux études futures, et associant d'avance au mot « Mathématique » l'idée de fatigue et d'ennui.

Le malheur, c'est que la réforme à faire dans ce sens exigerait une transformation radicale des cerveaux et l'abandon d'habitudes invétérées; aucun livre d'étude ne peut contribuer à en hâter l'accomplissement, puisqu'il s'agit justement alors de ne jamais placer un livre entre les mains de l'enfant. Ce sont les maîtres qu'il faudrait transformer ; or, quand on a reçu un enseignement mal compris et déraisonnable, il est difficile de s'en rendre compte. C'est pour cela qu'il s'écoulera peut-être un temps bien long avant que les idées de La Chalotais rencontrent le milieu dans lequel elles sont destinées à fructifier et à produire les heureux résultats qu'on est assuré d'en tirer.

Malgré tout, bien ou mal, dans des conditions quelconques, l'enfant a appris à calculer un peu : les années se sont écoulées, et il atteint l'âge où l'on va commencer à lui enseigner l'Arithmétique.

C'est alors qu'il est essentiel de lui montrer dès le début comment il a procédé lui-même sur les quantités concrètes, comment il a fait ses abstractions, de lui donner d'une façon nette et par des exemples répétés la notion du nombre, sous

forme abstraite ou concrète. Il convient alors de reprendre les opérations avec lesquelles il est familier déjà, et de lui en montrer le « pourquoi ». La numération, les diverses opérations simples de l'Arithmétique exigent alors le développement d'explications et de raisonnements dans lesquels on ne fera quelques progrès qu'à la condition de provoquer constamment l'élève à aller au-devant de ces raisonnements. La chose n'est pas toujours facile, car la théorie de la division, tout simplement, est délicate à comprendre et d'une exposition malaisée pour un jeune esprit peu familiarisé avec le maniement du langage scientifique. Il faut bien remarquer cependant que la connaissance préalable du calcul simplifie de beaucoup la tâche.

Les principes dont il y a lieu de s'inspirer, dans cette première période de l'enseignement scientifique de l'Arithmétique, sont surtout les suivants : insistance sur les idées générales; introduction, dès le début, de la notion de rapport ; rapprochement continuel entre les résultats auxquels conduit le raisonnement et les procédés préalablement connus qu'on a rencontrés dans la pratique du calcul ; applications nombreuses, continuelles, simples d'abord, et dans tous les cas se rapportant directement aux théories que l'on traite.

C'est de la sorte qu'on pourra successivement passer du calcul pratique au calcul raisonné, montrer comment l'idée du nombre s'étend et se généralise, arriver à la génération des fractions, en s'attachant surtout aux fractions décimales, à la formation des puissances, à l'extraction des racines, en rencontrant par occasion des notions d'Arithmologie, sur les nombres premiers et premiers entre eux, par exemple, qu'on doit donner avec un soin extrême, tout en les restreignant rigoureusement à ce qui est nécessaire pour la suite.

Bien entendu, dans un tel enseignement rationnel, les progressions, et surtout les progressions composées de termes entiers, doivent être introduites. On ne peut comprendre pour quels motifs des sujets exclusivement arithmétiques comme ceux-là, et qui jadis étaient placés à leur vrai rang, ont été relégués dans d'autres parties, c'est-à-dire dans l'Algèbre.

Il est clair que, dans tout le cours de cet enseignement arithmétique, l'usage des lettres devra être introduit chaque fois que cela pourra faciliter les raisonnements ou la recherche

des solutions. Nous avons vu que ce n'est là en aucune façon un empiétement sur l'Algèbre, qui se distingue par des caractères d'une tout autre nature.

L'Arithmétique ne peut être complètement exposée si l'on n'y fait pas figurer la théorie des approximations. Par de nombreuses applications, il est possible de rendre claire cette théorie, qui n'est certainement pas exempte de difficultés, et cela sans quitter le domaine élémentaire ; on arrive aussi par ce moyen, et à force de multiplier les exemples, à en rendre l'usage familier, ce qui est au moins aussi utile que de bien posséder la doctrine elle-même. Rien n'est plus indispensable que cette étude comme préparation générale aux études ultérieures.

On doit faire rentrer encore dans l'enseignement de l'Arithmétique, mais à titre de compléments, et lorsque le moment en est venu, certains calculs spéciaux, tels que les constructions de tables, le calcul des différences au point de vue de ses applications numériques, la résolution numérique de quelques équations.

Enfin, il faut ne pas hésiter à donner quelques indications sur un certain nombre de questions intéressantes, telles que les fractions périodiques et leur généralisation, les systèmes de numération en général, les théorèmes les plus simples sur les nombres premiers, et les notions les plus élémentaires sur les congruences.

Il va de soi que tout cet enseignement doit être échelonné sur un assez grand nombre d'années, et se combiner avec celui des autres branches de la science mathématique. Il ne faut jamais perdre de vue que les sciences sont destinées à se compléter les unes les autres ; on ne s'assimile convenablement aucune d'elles sans avoir des notions de celles qui y confinent.

L'enseignement arithmétique, notamment, dès qu'on aura franchi les premiers degrés, tirera grand profit des premières notions d'Algèbre et de Géométrie. Il y aura donc lieu d'en commencer l'étude d'une façon à peu près simultanée, aussitôt que les théories arithmétiques auront été poussées au point voulu pour rendre les premiers principes intelligibles.

Je ne dirai que peu de mots de ce qui touche l'enseignement élevé de l'Arithmologie. On ne saurait guère formuler de règles générales lorsqu'il s'agit d'un enseignement donné à des hommes, non plus à des enfants, et qui porte sur les hautes régions de la Mathématique. Là, le professeur doit être un savant, et non plus seulement un pédagogue ; ce qu'il peut faire de mieux, c'est d'exposer surtout ses propres travaux, de montrer comment ils se rattachent à l'ensemble de la science, et de quelle manière ils peuvent devenir la source de nouveaux progrès.

Ceci est particulièrement vrai en Arithmologie ; car, si cette science a été enrichie par les travaux des plus illustres géomètres, elle manque cependant plus que toute autre de méthodes générales. On pourrait dire à ce point de vue que la Théorie des nombres est encore dans l'enfance ; malgré cela, les propositions qu'elle présente exercent un attrait tout particulier sur l'esprit, et elle mériterait une sollicitude plus large que celle dont elle est généralement l'objet.

A ce sujet, il est permis de trouver regrettable pour notre pays le délaissement dans lequel est tombé en France l'enseignement de l'Arithmologie. De grands esprits, parmi nos compatriotes, tels que Fermat, Legendre, Cauchy, Lamé, Liouville, Lucas, ont apporté à cette science de larges contributions ; ce fut pendant longtemps une science française, malgré l'empreinte si profonde qu'y a laissée le génie de Gauss. Et cependant, pas une chaire de Théorie des nombres n'existe en France ; il est juste de reconnaître d'ailleurs que l'enseignement de la Théorie des nombres serait difficile à rétablir actuellement, faute d'un professeur. Mais il n'est pas interdit d'espérer une renaissance, et de la souhaiter prochaine.

CHAPITRE III.

ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE ET DU HAUT CALCUL.

En Algèbre comme en Arithmétique, la pratique du calcul a une importance préliminaire capitale ; mais ce calcul ne saurait être enseigné par les mêmes moyens : il exige, seulement pour qu'on en comprenne l'utilité, des notions générales correspondant à un certain état d'avancement de l'esprit. C'est par là, cependant, qu'il convient de débuter, mais en se bornant aux opérations rigoureusement élémentaires ; les autres seront étudiées plus tard, à leur tour, à mesure qu'elles apparaîtront comme une nécessité.

Le meilleur moyen de présenter les premières opérations du calcul algébrique, c'est d'invoquer les notions d'Arithmétique que l'élève possède déjà, en attirant son attention sur l'avantage qu'il y aurait, dans la solution d'une question, à savoir, une fois pour toutes, les opérations qu'il y aura lieu de faire pour obtenir le résultat. La distinction des données et des inconnues, les procédés habituels de représentation des quantités par des lettres, le rappel des principaux signes d'opérations, qu'on a déjà plus ou moins rencontrés en Arithmétique, découlent de là d'une façon assez naturelle, et permettent d'exposer sans trop d'efforts le premier vocabulaire des termes algébriques que l'on doit employer le plus souvent. Les opérations proprement dites étant alors entreprises, la soustraction permet sans plus tarder d'ouvrir une large parenthèse sur les quantités négatives et les nombres négatifs, et de jeter ainsi, dès le début, dans l'esprit du commençant, des idées nettes, et surtout des idées simples qu'il reprendra plus tard avec grand profit. Dans ce but, il faut, sans nulle hésitation, se servir de toutes les ressources que l'élève peut avoir déjà sous la main, et spécialement de la représentation géométrique ; celle-ci n'exige rien autre chose

que la notion de la ligne droite, et elle a le grand mérite de fournir l'occasion d'insister sur la continuité des grandeurs, sans avoir besoin de se lancer dans des considérations obscures ou compliquées.

Il n'y a d'ailleurs aucun inconvénient, bien au contraire, à montrer ici comment on procède pour passer des grandeurs aux symboles qui les représentent, et à indiquer comment une grandeur concrète quelconque arrive à pouvoir trouver sa représentation dans un symbole déterminé, la réciproque n'étant pas vraie, car elle dépend de la nature concrète des grandeurs. Toutes ces idées philosophiques, à la condition d'être amenées avec discrétion et méthode, sans appareil ni solennité, mais au contraire comme remarques toutes naturelles, sont plus qu'utiles ; elles sont indispensables pour une compréhension convenable du développement ultérieur de la science.

Sur de telles bases, il est possible de poursuivre les quatre opérations fondamentales, d'une façon rationnelle, et de les étendre aux fractions algébriques ; ce n'est plus seulement la pratique et l'habitude du calcul algébrique qu'il s'agit d'inculquer à l'élève, mais en même temps on l'accoutume à raisonner d'une façon rigoureuse, à comprendre les motifs de chacune des règles qu'on lui apprend, ou plutôt qu'on lui fait deviner au fur et à mesure. La multiplication et la division surtout offrent l'occasion de mettre en lumière de nombreuses identités dont l'emploi sera très fréquent ; c'est un grand tort de les passer sous silence, ou de les reléguer, comme on le fait si fréquemment, dans d'autres Chapitres. Il est bon de parsemer cette première partie de l'enseignement d'applications incessantes, et d'aborder sans crainte certains calculs tels que les puissances successives d'un binome, les progressions, sans attendre plus longtemps, dût-on y revenir plus tard.

Un seul exemple fera comprendre ma pensée sur ce point, et montrera quelle incohérence règne en général dans l'enseignement des premiers éléments de l'Algèbre. La division algébrique conduit à l'identité

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1,$$

d'ailleurs facile à établir, et qu'on trouve dans presque tous les cours. Or, en général, lorsque plus tard on cherche la somme des termes de la progression

$$1,\quad q,\quad q^2,\quad \ldots,\quad q^{n-1},$$

on se donne la peine de faire une démonstration spéciale pour établir que cette somme est $\frac{q^n-1}{q-1}$. N'est-ce pas cependant la même vérité que tout à l'heure, à cette seule différence près qu'on a changé x en q? On surcharge ainsi la mémoire, on ne montre pas le lien qui existe entre des chapitres identiques sous des apparences différentes, on engendre le dégoût qui suit le défaut de compréhension générale. Et l'on pourrait facilement citer bien d'autres exemples. Le plus triste, c'est que ces habitudes vicieuses sont invétérées à un tel point que l'on se trouve contraint de s'y conformer dans l'enseignement, alors même qu'on les juge à leur exacte valeur. Les programmes ne permettent guère d'agir autrement.

Arrivé au point que nous avons indiqué, c'est-à-dire une fois en possession du calcul algébrique élémentaire, l'élève peut aborder l'étude des équations algébriques, dont il n'a pas jusqu'ici entendu même prononcer le nom. Il est essentiel de lui expliquer alors, et sans aucun détour, comment les équations s'introduisent, quelle en est l'origine, en exposant à grands traits sur les fonctions les idées générales que nous avons trop souvent rappelées dans les pages qui précèdent pour qu'il soit nécessaire d'y revenir. Les opérations générales sur les équations, sur les transformations qu'on peut leur faire subir, permettent d'arriver ensuite à l'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré, ainsi qu'à celle des inégalités.

Remarquons bien cependant la nécessité de savoir se restreindre, et de proportionner l'enseignement à l'avancement intellectuel des élèves auxquels on s'adresse. Si l'on voulait ici pousser un peu loin l'étude des équations du premier degré, on se trouverait conduit à l'exposition délicate de la théorie des équations linéaires, c'est-à-dire, par contre-coup, à celle des déterminants, qui demande plus d'habitude préalable du calcul et plus d'instruction acquise. Dans une première étude comme celle-ci, il est donc nécessaire de présenter

seulement des exemples simples, s'étendant à des systèmes à trois inconnues, ou à quelques exercices très particuliers dans lesquels ce nombre trois se trouverait surpassé.

Tout ce chapitre des équations du premier degré resterait lettre morte et représenterait presque un travail inutile, pour l'élève comme pour le maître, si des applications continuelles ne venaient l'éclairer et en diminuer l'aridité. Les problèmes méritent d'ailleurs une attention spéciale, et prêtent à des remarques qu'on peut produire une fois pour toutes, qui feraient l'objet d'une ou de plusieurs leçons très utiles, et que d'habitude on ne rencontre nulle part. C'est peut-être la première et la plus simple occasion qui soit offerte pour faire aisément comprendre le but général de la science mathématique et ce que c'est que le retour de l'abstrait au concret, qui se présente ici sous la forme de discussion des solutions.

Avant d'aborder les équations du deuxième degré, quelques notions nouvelles de calcul sont nécessaires. Ici viennent prendre place la théorie de la racine carrée, les notions sur les radicaux du deuxième degré, comme préparation aux équations elles-mêmes. Dans l'enseignement ordinaire, surtout tel qu'on le comprenait il y a peu d'années encore, cette étude du second degré et des questions qui s'y ramènent se trouvait accompagnée de certaines considérations particulières sur les maximums ou les minimums, abordables par les équations du second degré, mais très artificiellement, et sous une forme fort peu philosophique. Puis s'introduisaient ensuite les progressions, les logarithmes, avec quelques applications, et le domaine de l'Algèbre élémentaire était de la sorte totalement exploré.

Malgré quelques réformes partielles, l'état actuel de l'enseignement présente encore dans cette partie bien des lacunes et bien des contradictions.

Tout d'abord, on court pour ainsi dire au-devant des difficultés relatives aux imaginaires, et on les rend insolubles pour les élèves, en ne présentant pas nettement cette théorie à l'occasion de l'extraction de la racine carrée. Il n'est pas plus difficile de le faire qu'il ne l'est de parler, à propos de la soustraction, de la théorie des quantités négatives. Et non

seulement ce n'est pas difficile, mais c'est très utile en vue des études ultérieures, si l'on profite de la circonstance pour donner les premières notions sur les quantités géométriques, pour insister sur l'extension nécessaire de la notion des opérations, à mesure que les symboles s'appliquent à de nouvelles quantités. Dès lors on s'aperçoit aisément que les imaginaires sont des quantités tout aussi réelles que les autres, et l'on en établit les règles de calcul avec une simplicité extrême, une netteté d'exposition qui frappe l'esprit, garantit contre les défaillances possibles de la mémoire, et permet de retrouver, de réinventer la théorie, si par hasard cette défaillance se produisait.

En s'y prenant ainsi, les solutions des équations du deuxième degré n'ont plus à être interprétées. Elles se présentent d'une façon absolument uniforme et générale ; tout s'éclaire et se simplifie. Un exposé des premiers principes de la théorie des quantités géométriques, conforme aux doctrines de Cauchy et de Bellavitis, pour ne citer que deux noms illustres, devrait donc prendre place immédiatement avant l'étude du deuxième degré.

Mais je poursuis. Voici les maximums et les minimums qui apparaissent à une place où l'on ne peut même pas les définir. On veut étudier l'un des points délicats des variations de fonctions, sans avoir prononcé le mot de fonctions, et l'on y arrive par une suite de procédés artificiels, par la solution de problèmes isolés les uns des autres. Est-ce donc là une méthode scientifique ? En continuant la lecture de notre programme, nous rencontrons l'étude des logarithmes ; et l'on prétendrait étudier sérieusement cette fonction logarithmique, sans dire même en quoi consiste la continuité. Tout cela, pour éviter l'introduction de notions beaucoup plus faciles, précieuses entre toutes, mais que, par convention, on a rejetées de l'enseignement élémentaire.

Le bon sens indique cependant qu'il n'y a pas à hésiter sur l'introduction du calcul des dérivées (1) dans l'enseignement

(1) C'est à dessein que je n'ai mentionné nulle part, soit précédemment, soit ici, les fonctions continues sans dérivées, qui ont fait quelque bruit naguère dans la science. Tout au plus quelques notions peuvent-elles être utilement données dans les plus hautes régions de l'enseignement, lorsque l'esprit est déjà formé, qu'aucune confusion n'est à craindre. Mais, chez des jeunes gens

de l'Algèbre, en se bornant bien entendu aux éléments les plus simples et aux applications les plus directement indiquées. Ces notions, placées après les équations et les problèmes du deuxième degré, permettent d'aborder très naturellement l'étude des maximums et des minimums.

En invoquant aussi la simple définition des coordonnées, qui seule permet la représentation graphique des fonctions, il est alors assez facile d'étudier, non seulement la fonction logarithmique, et aussi les exponentielles, d'une façon claire au lieu de se perdre dans la confusion des symboles, mais encore quelques fonctions simples, par exemple les fonctions circulaires, qui seront d'une continuelle application.

Bien entendu, les notions géométriques, acquises par l'élève préalablement, permettent une telle exposition et lui donnent un caractère complètement naturel. Il va de soi que les diverses branches de l'enseignement mathématique doivent être suivies parallèlement, de manière à s'appuyer réciproquement les unes sur les autres.

J'en ai dit assez sur l'enseignement de l'Algèbre élémentaire pour que ma pensée soit clairement et complètement comprise. Ce n'est là qu'une sorte d'Introduction; et les jeunes gens qui peuvent pousser plus loin auront bien d'autres notions à acquérir. On a classé fréquemment ces notions en deux grandes catégories : Algèbre de mathématiques spéciales, Algèbre supérieure. Il faut d'autant moins chercher quelque sens précis, sous ces appellations bizarres, que la première tout au moins ne représente rien de stable; une théorie, une proposition particulière sont introduites dans le programme de mathématiques spéciales; après quelques années de présence, elles disparaissent (pour se réfugier sans doute dans l'Algèbre supérieure) et font place à une théorie d'Algèbre supérieure, qui descend en spéciales, jusqu'au jour où viendra se produire une nouvelle permutation en sens inverse. Comment savoir, dans une telle classifi-

---

dont l'éducation mathématique n'est pas faite, ces aperçus, forcément incomplets, risquent d'engendrer le scepticisme et l'hésitation sans aucun profit. Il s'agit d'une conception nouvelle de l'idée de fonction; et, dans l'enseignement moyen, il serait facile de tourner la difficulté, à supposer qu'elle existe, en ajoutant à la définition d'une fonction continue la condition d'admettre en général une dérivée, et en laissant de côté l'étude des fonctions qui ne rempliraient pas cette condition.

cation, où l'on devrait ranger les fractions continues, la théorie des formes, la décomposition des fractions rationnelles, le théorème de Sturm, le théorème fondamental sur la théorie des équations (dit théorème de d'Alembert)?

Mais, à côté de ces perturbations capricieuses de l'enseignement, il y a, en Algèbre comme partout, deux catégories de notions bien distinctes : celles qui répondent à des théories achevées, complètes, sur lesquelles la Science a trouvé sa formule définitive; et celles qui provoquent encore chaque jour des travaux de la part des savants. Les dernières ne peuvent relever que du haut enseignement; nous ne nous y arrêtons pas; quant aux premières, elles représentent un vaste champ de connaissances dans lesquelles un enseignement moyen rationnel doit glaner, en choisissant les chapitres dont les applications sont les plus générales, ou qui sont de nature, par les questions qui s'y trouvent soulevées, à projeter sur l'ensemble de la Science la plus grande somme de clarté.

Dans un tel ordre d'idées, la théorie des Déterminants et des Équations linéaires, la théorie générale des équations (y compris le théorème fondamental), l'étude de la décomposition des fractions rationnelles, et un complément aux premières notions sur les dérivées, me semblent ne pouvoir donner matière à aucune contestation sérieuse, et constituent les éléments nécessaires d'une instruction mathématique moyenne. Il y a lieu d'y ajouter, bien que rigoureusement ceci n'appartienne plus au domaine exclusif de l'Algèbre, des connaissances assez complètes sur les premières notions du calcul infinitésimal et ses applications. Ce serait en effet une conception extraordinaire que de laisser subsister le fond même des idées sur lesquelles repose le calcul infinitésimal, sous le nom de théorie des dérivées, et de proscrire ce qui tend à rendre ce calcul facilement applicable et maniable, c'est-à-dire la notation différentielle. Des contradictions pareilles ne sauraient être durables.

Quel que soit, en tout cas, le programme auquel on aura cru devoir s'arrêter à un instant donné, les règles à adopter pour en assurer le développement rationnel sont toujours invariablement les même Les élèves ont beau se trouver

en possession d'une maturité intellectuelle supérieure, il n'importe pas moins de mesurer l'enseignement à leur force, de présenter même les théories difficiles sous la forme la plus simple, de ne jamais reculer devant les idées générales, de multiplier les applications, de solliciter sans cesse la curiosité scientifique, et surtout d'attirer l'attention sur les idées qui se représentent dans plusieurs circonstances diverses, afin d'éviter chaque fois la dépense d'un effort intellectuel inutile, qui peut être mieux employé.

Quant au Calcul infinitésimal proprement dit, il forme, en y adjoignant certains chapitres du Calcul des fonctions, empruntés aux parties de cette science pour lesquelles la doctrine est définitivement établie, une branche importante de l'enseignement donné dans les Facultés, les Universités, et en France dans les grandes Écoles. Cet enseignement de l'Analyse est poussé plus ou moins loin, suivant le but que l'on se propose d'atteindre. Tantôt il s'agit, par l'exposé des travaux récents, de montrer dans quelles directions d'esprit, suivant quelles routes on peut espérer découvrir des vérités nouvelles; tantôt on se propose de former de futurs professeurs; d'autres fois enfin, les notions scientifiques dont il s'agit sont surtout destinées aux applications effectives; c'est ce dernier cas qui se présente pour les écoles où se recrutent les ingénieurs. Il est clair que dans ces divers cas, et suivant le temps dont on dispose, l'enseignement du haut Calcul doit être plus ou moins étendu, plus ou moins profond, et recevoir une direction différente. Beaucoup de science acquise et beaucoup de discernement sont nécessaires pour atteindre le but.

A cet enseignement scientifique, on a souvent fait des objections superficielles, pouvant en général se résumer en ceci : A quoi bon toutes ces notions théoriques? Il ne s'agit pas de former des savants, mais des hommes pratiques, capables de bien s'acquitter des fonctions qu'ils auront à remplir.

D'abord, l'enseignement ne forme jamais des savants; les savants se forment eux-mêmes. Parmi les auditeurs d'un cours quelconque de Mathématique, ceux qui ont le goût instinctif de la science, l'amour de la recherche, finiront par trouver leur voie. Tel n'est pas le cas de la grande majorité. Mais l'ingénieur qui n'aurait pas été mis en posses-

sion des notions scientifiques générales qu'on lui donne comme préparation professionnelle, se trouverait dans un incontestable état d'infériorité. D'un côté, bien des problèmes pourront se présenter à lui dans la pratique d'une façon inopinée; plus d'une fois, il aura grand avantage à employer des ressources puisées dans l'enseignement scientifique précédemment reçu. En outre, l'esprit mathématique, c'est-à-dire l'habitude du discernement, de la précision, de la méthode, la distinction de l'abstrait et du concret, de l'absolu et du relatif, donne une aptitude particulière pour étudier les questions que l'ingénieur peut avoir chaque jour à résoudre, alors même que ces questions ne constituent pas des applications directes de la Mathématique.

Il est enfin une dernière considération sur laquelle je peux passer rapidement ici, puisque je serai conduit à y revenir dans l'un des chapitres qui vont suivre. Il serait difficile d'admettre qu'un ingénieur, savant ou non, puisse se passer de notions de Mécanique, puisqu'il aura, tous les jours, pour ainsi dire, à faire de la Mécanique appliquée. Or, la Mécanique appliquée n'existe pas sans une étude de la Mécanique rationnelle, et la Mécanique rationnelle exige des connaissances assez étendues sur le Calcul infinitésimal et sur le Calcul des fonctions. Cette raison, bien qu'indirecte, suffirait à elle seule pour justifier amplement l'introduction dans l'enseignement préparatoire des notions dont nous avons parlé. On serait bien souvent en droit de regretter au contraire que les nécessités générales imposées par les autres parties de l'enseignement, et aussi le temps restreint dont on dispose, ne permettent pas de donner un plus large développement à ces théories élevées, concernant le Calcul différentiel, le Calcul intégral et le Calcul des fonctions. Dans l'impossibilité où l'on se trouve d'étendre ces programmes, gardons-nous du moins de laisser porter atteinte aux modestes éléments qui y figurent aujourd'hui. Ce serait la marque d'un recul, d'une décadence dont les effets ne tarderaient pas à se faire sentir dans le domaine de la pratique, et montreraient ainsi, mais trop tard, aux détracteurs de l'enseignement scientifique, combien grande est leur erreur et combien leur thèse paradoxale est contraire au but qu'ils désirent atteindre.

CHAPITRE IV.

ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE.

Les premières notions géométriques devraient être données à l'enfant parallèlement aux premières notions d'Algèbre, c'est-à-dire succéder, sans trop de retard, à l'initiation à l'Arithmétique raisonnée. Mais, de même que pour l'Arithmétique il y a une préparation préliminaire, la pratique du calcul, de même il est utile que la Géométrie théorique soit précédée de la pratique du dessin. L'habitude prise, dès l'enfance, de tracer des figures nettes et sensiblement exactes, sera d'un grand secours plus tard lorsque se développeront les divers chapitres de la Géométrie. Celui qui a défini cette science « l'art de raisonner juste sur des figures fausses » s'est singulièrement trompé. On ne raisonne jamais que sur des abstractions, et les figures sont toujours fausses; mais, lorsque l'approximation est par trop grossière, lorsque les tracés sont mal exécutés et confus, cette confusion matérielle engendre vite celle du raisonnement, et contribue à empêcher l'apparition de la vérité. Il y a même des circonstances où une figure mal faite permet, par des raisonnements irréprochables, d'arriver à des absurdités manifestes. La première éducation géométrique doit donc être entreprise, comme celle du calcul pratique, chez l'enfant qui apprend à lire et à écrire, et cela sous forme de tracés dont profitera aussi l'enseignement du dessin d'imitation ordinaire. La Chalotais, que nous avons déjà cité, insiste sur ce point avec grande raison dans son *Essai d'éducation nationale*.

On doit profiter de cette pratique du dessin des figures pour donner en même temps à l'enfant la nomenclature, *sans aucune définition*, d'un très grand nombre de faits géométriques. Sans aucune fatigue de mémoire, et à force, en se jouant, de multiplier les tracés, il saura bientôt ce que c'est

qu'une droite, un cercle, un système de droites parallèles, un carré, un rectangle, un losange, un trapèze, etc. Ce sera autant de gagné pour l'avenir; et, lorsque se présenteront plus tard les définitions rigoureuses, il n'aura pas de peine à les rapprocher de ce qu'il aura vu et exécuté lui-même si souvent.

Rien ne s'oppose même à ce que l'on complète ces notions par quelques autres sur la Géométrie de l'espace. Quand un jeune écolier a acquis assez d'habileté pour dessiner un cube en perspective, pourvu qu'il ait entre les mains le modèle à représenter, il est facile d'attirer son attention sur les particularités que présente cette figure : faces, arêtes, sommets ; on peut faire de même pour un grand nombre d'autres figures, cylindres, cônes, etc., et l'amener même à confectionner ces figures par des découpages et des collages de cartons. A ces leçons de choses, toujours récréatives, n'exigeant jamais rien de la mémoire, l'esprit géométrique se développe, le sens des figures s'acquiert, dans le plan et aussi dans l'espace, et l'on a semé une bonne graine pour l'éducation scientifique qui devra venir plus tard.

Dans toute cette période l'usage des instruments doit être le plus souvent évité, puisqu'il s'agit de faire ici surtout l'éducation de l'œil et de la main. Seulement, l'emploi du papier quadrillé est non moins utile que pour les opérations de calcul, surtout au début.

Lorsque viendra l'étude scientifique de la Géométrie, l'enfant arrivera donc muni d'un petit bagage préparatoire fort précieux, et qui évitera autant de peine et de perte de temps à lui-même qu'au professeur. Il sera capable de reproduire rapidement et nettement, avec une exactitude suffisante, les figures tracées sous ses yeux ; il aura une nomenclature assez complète de ces figures.

Actuellement l'initiation géométrique a eu lieu suivant une méthode bien aride, et pourtant le sujet est un de ceux, dans la Mathématique, qui permettent le mieux d'éviter l'aridité. Il faut néanmoins reconnaître que, dans les dernières années, d'importantes tentatives ont été faites pour modifier un peu la forme rigide et même rebutante sous laquelle la Géométrie se présentait jadis, et dont le célèbre livre de Legendre offre le type le plus parfait. Parmi ces ten-

tatives, on peut citer beaucoup d'excellents ouvrages, mais aucun ne me paraît égaler ceux de M. Ch. Méray, dont l'œuvre a la portée d'une véritable révolution pédagogique.

C'est peut-être en Géométrie, plus que dans aucune autre des parties élémentaires de la Mathématique, que la curiosité, l'esprit de recherche peuvent être le plus facilement mis en éveil. La grande question, c'est d'amener l'élève à chercher lui-même, à découvrir les propriétés, à se poser des problèmes ; dans ce but, il faut soigneusement éviter la forme dogmatique et pénible de Legendre, et, après avoir nettement insisté sur les idées générales fondamentales, chercher à classer l'étude que l'on poursuit d'après la nature des figures, en commençant par les plus simples.

Les axiomes dont on a besoin doivent être introduits avec une entière franchise ; les définitions doivent être soigneusement choisies. C'est ainsi que la célèbre définition de la ligne droite, « le plus court chemin d'un point à un autre », définition d'ailleurs à peu près unanimement abandonnée, représente l'un des plus remarquables exemples de la persistance avec laquelle une absurdité peut se propager pendant des siècles. En premier lieu, l'idée exprimée est incompréhensible pour des commençants, puisqu'elle suppose la notion d'une longueur courbe ; en outre, c'est un cercle vicieux, car la longueur d'une courbe ne peut être comprise que comme limite d'une somme de longueurs rectilignes ; de plus, cela n'est pas une définition, puisque c'est au contraire une proposition démontrable. Pourquoi ne pas reconnaître franchement que la ligne droite est indéfinissable ? Pourquoi ne pas admettre la propriété dont il s'agit, à titre d'axiome provisoire ? Pourquoi ne pas profiter de la circonstance pour montrer que la ligne droite, de même que toute ligne, toute figure géométrique, n'existe que dans notre esprit ? Tout simplement parce qu'on a voulu trop longtemps réduire la Géométrie à un mécanisme logique, et qu'on s'imaginait la diminuer en lui attribuant une origine expérimentale.

M. Méray, dont le premier ouvrage remonte à 1874, a rompu en visière avec cette routine de l'enseignement ; et sa méthode, qui a subi l'épreuve de la pratique, est à la veille

d'un triomphe incontesté. Cet espoir me dispense de formuler bien d'autres critiques et cela me permet de me borner à des exemples.

La Géométrie à une dimension et en particulier la Géométrie de droite offrent des notions intéressantes à introduire dès le début, sauf à les reprendre plus tard après l'étude des mesures et des rapports, de manière à arriver à cette conclusion évidente, bien peu remarquée : « Toute identité algébrique entre quantités positives ou négatives est la traduction d'une propriété de points en ligne droite. »

Autre chose. On définit des figures égales : deux triangles égaux, par exemple, sont ceux que l'on peut superposer. Mais cette superposition peut s'essayer de deux manières : par *glissement* dans le plan, ou par l'obligation supplémentaire de *retourner* l'une des deux figures. Il faudrait donc distinguer l'*égalité directe* et l'*égalité symétrique*. La différence philosophique est capitale, puisqu'on n'arrive à la superposition qu'en sortant de l'espace à deux dimensions que l'on étudie. Elle engendre une conséquence intéressante, car c'est la base même de la symétrie, qu'on doit étudier le plus tôt possible. Et lorsqu'on arrivera à la Géométrie de l'espace, lorsqu'on examinera deux trièdres symétriques, par exemple, est-ce qu'on n'aura pas ainsi l'explication de ce phénomène, bizarre pour les commençants, de figures égales dans toutes leurs parties, mais pas superposables ? L'analogie avec le plan est manifeste. Pour superposer les figures, il faudrait faire sortir l'une des figures de l'espace réel où nous sommes et la retourner, ce qui ne se peut. Mais le résultat peut être obtenu par une représentation matérielle, physique, absolument frappante : le retournement à la manière d'un gant ou d'un bonnet de coton.

Et tout cela pourra et devra être repris et complété à propos de la similitude qui peut être, elle aussi, directe ou symétrique.

Il y aurait encore des amputations indispensables ; je n'en citerai qu'une. Qui pourrait dire les raisons pour lesquelles, dans la plupart des Cours ou des programmes, on a laissé traîner le calcul de π par la méthode des périmètres et par celle des isopérimètres ? Et il y a des élèves qui ont pâli pendant des semaines sur de telles questions;

quelques-uns, leurs études terminées, croient encore que c'est comme cela que l'on a calculé le rapport de la circonférence au diamètre! Ceux-là sont vraiment excusables s'ils portent sur la Science Mathématique des appréciations peu sympathiques, mais plutôt bizarres : la faute en est à d'autres.

Je ne saurais passer en revue les principaux sujets que doit comprendre un enseignement méthodique et raisonné de la Géométrie. Mais il est bon d'insister sur l'utilité d'introduire dans certains éléments, dans tous les éléments mesurables, pourrions-nous dire, la notion du *sens*, ou du signe, aussitôt que ces éléments se présentent pour la première fois. La marche parallèle de l'Algèbre et de la Géométrie rend la chose facile, et en appliquant cette méthode on fait gagner bien du temps, et l'on s'épargne bien des difficultés pour l'avenir.

Pour nous en tenir à la Géométrie plane, les éléments dont il s'agit se réduisent aux segments, aux angles et aux aires. Y a-t-il donc une difficulté notable à remarquer tout de suite qu'il y a lieu de distinguer les segments AB et BA, que les segments sur une droite peuvent être portés dans deux sens opposés? Ne doit-on pas montrer aussi que les angles peuvent avoir deux sens, parce qu'une rotation peut s'effectuer en deux sens opposés? Et, profitant de l'occasion, il n'est pas inutile, incidemment, d'indiquer qu'un angle tracé n'est pas un angle défini; la différence entre un segment et un angle étant à peu près la même, au point de vue des mesures, que celle existant en Arithmétique entre une égalité et une congruence. Et, les signes des angles entraînant comme conséquence la considération des signes des aires, on arrive tout naturellement à constater, par exemple, que les triangles ABC et ACB ont des aires de signes contraires, et que $OBC + OAB + OCA = ABC$, quelle que soit la position du point O sur le plan; proposition dont la portée est peut-être plus grande, au point de vue de l'éducation de l'esprit, que certains théorèmes ou problèmes incorporés dans l'enseignement par la puissance de l'usage.

J'admire autant que personne la Géométrie des Grecs; mais qui dit progrès dit changement. Et parfois le chan-

gement devrait consister à remonter beaucoup plus haut que les Grecs. C'est ainsi que, pour le célèbre théorème dit de Pythagore, et qu'on reprend au moins sous deux formes différentes, sans aucun avertissement, on donne une démonstration géométrique passablement compliquée, très peu naturelle en tout cas, alors qu'il en existe une que l'on doit aux Hindous, qui est non moins rigoureuse, qu'un enfant de moins de dix ans peut facilement comprendre, et qu'il est sûr, l'ayant comprise, de ne jamais oublier.

L'idée générale de transformation doit être franchement introduite dans l'enseignement aussitôt que la chose est possible. Pourquoi, par exemple, ne pas montrer ce qu'est l'homothétie et en déduire la similitude? Pourquoi ne pas indiquer ce que sont les centres de similitude de deux figures semblables quelconques, en distinguant la similitude directe et la similitude symétrique? Pourquoi ne pas parler de l'inversion, cette méthode si puissante, si féconde et si simple, même dans des cours tout à fait élémentaires! Des notions sommaires sur la division harmonique, sur les divisions homographiques, sur l'involution, ne coûteraient pas non plus une grande peine et intéresseraient l'élève. Mais toutes ces questions font partie de ce qu'on est convenu d'appeler la Géométrie moderne ou quelquefois la Géométrie supérieure. Ce n'est pas une raison suffisante à mes yeux pour les bannir de l'enseignement, ni même pour les rejeter en bloc dans un chapitre complémentaire vers la fin des études. Donner de bons outils à l'ouvrier quand la tâche est finie ne me paraît pas être le comble de la logique.

Deux idées importantes méritent d'être constamment mises en lumière et appliquées : la première l'est en fait par tous les professeurs dignes de ce nom : c'est celle des lieux géométriques. Je n'y reviens donc pas. L'autre est celle des constructions. L'élève, à ce degré, a entre les mains une règle et un compas ; il importe de lui montrer tout ce qu'on peut arriver à faire à l'aide de ces deux simples instruments ; on doit reprendre toutes les expressions algébriques déjà connues, et qui s'y prêtent, pour les traduire en constructions géométriques ; on doit demander de chaque problème des constructions effectives, et non pas seulement théo-

riques. Ce serait ici le moment de placer des notions sommaires, et cependant suffisantes, de Géométrographie; il n'y faudrait pas consacrer beaucoup de temps pour y intéresser de jeunes auditeurs, et on les perfectionnerait sans autre effort dans l'art des constructions géométriques ; pour les personnes qui attachent un grand prix à l'émulation, ne serait-il pas intéressant, dans des classes nombreuses, de voir ouvrir des *concours de simplicité* sur un résultat géométrique à obtenir avec la règle et le compas ?

Dans une grande partie des considérations précédentes, nous avons supposé, implicitement ou d'une manière expresse, que l'Algèbre et l'Arithmétique étaient enseignées parallèlement à la Géométrie. C'est indispensable et non pas seulement utile, pour conserver à l'ensemble des notions mathématiques ce caractère d'unité et de coordination sans lequel elles arrivent à perdre tout intérêt et toute valeur. Un jeune homme qui aurait appris l'Arithmétique, pour passer ensuite à l'Algèbre, puis à la Géométrie, et qui continuerait de la sorte pendant dix ans, aurait l'esprit moins formé qu'avec trois ou quatre années d'un enseignement parallèle, conduit avec une certaine intelligence.

Ceci m'amène à quelques nouvelles observations sur l'étude des coniques en Géométrie. Dans beaucoup de programmes on de cours élémentaires, cette étude forme un chapitre spécial et important. On la fait sans le secours de la Géométrie moderne, qui la simplifierait et l'éclairerait, et aussi, bien entendu, sans se servir des méthodes de la Géométrie analytique, que l'élève ne doit pas connaître encore. Toujours parce que les Grecs ne connaissent ni Descartes ni Chasles, ce dont ils sont excusables.

Est-ce que le bon sens n'indique pas que tout cela doit être mené parallèlement? Des éléments bien simples de Géométrie analytique ayant permis de trouver les principales propriétés des coniques, il est fort utile de rapprocher de ces résultats ceux qu'on peut obtenir rien que par les ressources de la Géométrie. Voilà une étude comparative qui éclaire l'esprit, qui montre par quelles voies différentes l'esprit humain peut accéder à la vérité, qui permet d'établir entre ces chemins divers une comparaison réfléchie et de

constater que les uns sont plus sûrs, les autres plus rapides, suivant les questions, et que dans l'ensemble tous sont également bons et dignes de provoquer l'admiration de ceux qui en profitent.

J'en ai fini avec la Géométrie proprement dite. Parmi les figures importantes qu'elle nous offre, il en est une plus particulièrement intéressante, soit sur le plan, soit sur la sphère, au point de vue des applications, quand on fait usage de l'Algèbre. C'est le triangle. De là est sortie une branche de la Science mathématique dont je crois à peine avoir prononcé le nom et qui occupe cependant une place importante dans l'enseignement : c'est la *Trigonométrie.*

C'est qu'en effet la Trigonométrie, telle qu'elle existe, est une science purement artificielle, sans corps, sans doctrine, et fabriquée uniquement pour les besoins de l'enseignement, et d'un enseignement peu rationnel. Pour qu'on en puisse juger, me bornant à la Trigonométrie *plane,* qu'on appelle partout, on ne sait trop pourquoi, Trigonométrie *rectiligne,* je remarque qu'elle est divisée en trois chapitres : 1° Étude des fonctions circulaires ; 2° Construction des tables; 3° Résolution des triangles et applications.

Or, les fonctions circulaires tirent leur définition et leur origine de la Géométrie, et sont étudiées en Algèbre ; la construction des Tables est une question d'Arithmétique qui s'introduit incidemment au cours de l'Algèbre, comme il arrive dans bien d'autres cas ; enfin, la résolution des triangles constitue bien évidemment un ensemble de problèmes géométriques, auxquels l'Algèbre vient apporter son secours.

Il n'y a, dans tout ceci, ni but spécial, ni doctrine, ni vue philosophique essentielle. Mais il y a la nécessité d'aborder des questions pratiquement indispensables, dont les applications à la Topographie et à la Géodésie sont continuelles. Et comme l'enseignement de l'Algèbre élémentaire est incomplet à un tel point qu'il ne comprend même pas l'étude des fonctions circulaires, comme celui de la Géométrie a consisté pendant des siècles à dicter Euclide et à le recopier, on a bien été forcé de former un amalgame composite sans suite, sans lien, qu'on a décoré d'un nom particulier. Il faut

savoir gré à ceux qui découpent ainsi la Science en petites tranches de n'avoir pas placé dans la Trigonométrie l'étude des logarithmes, sous prétexte que les logarithmes sont utiles à la confection des Tables ; mais, d'un autre côté, on a enrichi cette science prétendue d'une théorie qui est l'une des plus importantes de la Mathématique en général : celle des projections. La théorie des projections appartient à la Géométrie, et crée l'un des liens les plus étroits entre cette science et l'Algèbre ; on ne l'a placée ni dans l'une ni dans l'autre ; on l'a reléguée où je viens de le dire ; le résultat, c'est qu'on la regarde comme un hors-d'œuvre sans grande importance, que les professeurs l'enseignent quand ils en trouvent le temps, que les élèves se l'assimilent d'une façon douteuse, et qu'après s'être donné beaucoup de mal, ils n'ont généralement de vues précises, ni sur l'Algèbre ni sur la Géométrie.

Si, par respect pour les habitudes prises, on tenait absolument à conserver le terme de Trigonométrie, on devrait au moins réduire cette branche à son dernier chapitre, qui seul répond au nom, et remettre les deux autres à leur rang naturel, en donnant à la théorie des projections une place d'honneur en Géométrie. Mais il serait mieux encore de faire de cette Trigonométrie ainsi comprise un chapitre de la Géométrie en général, et d'y incorporer tout ce qui est assez étudié dans la Géométrie du triangle, et d'un intérêt assez général, pour mériter de devenir classique et de passer dans l'enseignement.

Parmi les sciences dont l'enseignement se rattache directement à celui de la Géométrie, il faut placer en première ligne la Géométrie descriptive, que nous avons essayé de caractériser plus haut. C'est une étude qu'il convient de commencer aussitôt qu'on se trouve en possession des éléments de la Géométrie de l'espace, sans lesquels les premiers principes ne présenteraient que confusion. Mais il importe de ne pas différer plus longtemps, car la Géométrie descriptive, dans tout son développement, réagit sur la Géométrie elle-même, aide à la mieux comprendre et fournit des ressources pour beaucoup de propositions.

Ce qui est essentiel dans la Géométrie descriptive, c'est de n'oublier jamais qu'elle est par essence une science d'application, et, par conséquent, d'éclairer l'enseignement par de continuels exercices, bien choisis, et empruntés plutôt aux exemples matériels qu'aux figures abstraites. Sans l'exécution des épures, faites avec soin, cet enseignement resterait à peu près totalement improductif; c'est ainsi par exemple que dans certains programmes de baccalauréats, où on l'a introduit sans pouvoir l'accompagner des exercices graphiques nécessaires, il n'a produit d'autre résultat que de terroriser les candidats en leur inspirant, pour la vie, l'horreur de la Géométrie descriptive.

On se demande parfois si, pour faire quelques progrès dans cette science, il est nécessaire de « voir dans l'espace », c'est-à-dire de prendre une conscience nette de la forme des corps ou des figures à l'inspection de leurs projections. Assurément; mais cette faculté ne se développe justement que par l'étude de la Géométrie descriptive; en suivant avec soin le développement de ses premiers principes, d'ailleurs simples, en appliquant les méthodes qu'elle fournit et en appelant le raisonnement à son aide, on arrive à faire de bonnes constructions, alors même qu'on ne « voit » pas encore; et, à force de répéter ces exercices, on finit par voir; c'est une faculté qui se développe assez vite même chez les sujets les moins bien doués naturellement à cet égard. On la perfectionne ensuite graduellement par la continuation d'une étude réfléchie et par l'exécution prolongée d'épures graphiques d'une difficulté croissante.

Un écueil à éviter quand on enseigne la Géométrie descriptive, c'est de rendre l'élève esclave de ses deux plans de projection et d'une ligne de terre invariablement tracée. Pour que l'on puisse tirer de cette étude tout le parti qu'elle permet dans les applications, il est très important de lui conserver une extrême souplesse; et la méthode du changement de plan vertical doit devenir d'une pratique pour ainsi dire instinctive. Quand ce changement a lieu parallèlement, ou lorsqu'on déplace le plan horizontal parallèlement à lui-même, on arrive à constater l'inutilité, dans une foule de questions, de tracer la ligne de terre, laquelle ne constitue plus qu'une superfétation. On ne saurait assez méditer les excellentes observations pro-

duites à ce sujet par M. Mannheim, l'une des plus hautes autorités contemporaines sur une question de cette nature (¹).

Ajoutons que, dans tout enseignement rationnel, il serait bon, et même indispensable, de faire marcher parallèlement l'étude des représentations par deux projections avec celle des projections cotées. On y gagnerait aussi bien en ce qui touche les applications futures que pour les progrès directs et immédiats qu'on veut atteindre.

Enfin, ici comme partout, il faut conduire l'élève vers les méthodes plutôt que de les lui apporter toutes faites. Le désir de trouver et de résoudre est ici doublé du sentiment d'utilité ; car l'esprit le plus vulgaire ne saurait reprendre l'éternelle et stupide objection : « A quoi cela peut-il servir ? » lorsqu'il s'agit de la Géométrie descriptive.

J'ai dit plus haut pour quelles raisons l'enseignement de la Statique me semblait devoir être incorporé à celui de la Géométrie, dont il formerait un chapitre complémentaire. Il n'est pas très utile d'y revenir, et je me borne à insister sur les précautions extrêmes avec lesquelles la notion abstraite de force doit être ici introduite et définie pour éviter des confusions, des idées fausses dont les effets se feraient sentir plus tard d'une façon désastreuse, lorsqu'on étudiera la Mécanique.

A cette étude de la Statique doit être adjointe, tout en restant distincte, la Géométrie des masses, dont nous avons également parlé. Pour montrer à quel point on peut avoir des dangers à éviter en ces matières, je me bornerai à citer un exemple d'erreur grossière obtenue par une fausse interprétation des questions et des principes.

On place d'habitude en Statique la détermination des centres de gravité, qui appartient à la Géométrie des masses. Or, en Statique, on déclare (c'est un postulatum fondamental) qu'il est possible de transporter une force le long de sa ligne d'action. Ceci étant, pour avoir le centre de gravité de deux points A et A′ de masses m et m', on peut considérer

(¹) Au moment même de la correction des épreuves de cette 2ᵉ édition, nous apprenions la triste nouvelle du décès de M. le colonel Mannheim (11 décembre 1906). C'est une grosse perte pour la science géométrique.

deux forces, F appliquée en A, F′ appliquée en A′, dirigées toutes deux suivant AA′ et dont les intensités soient dans le rapport $\frac{m}{m'}$. Transportons-les le long de la ligne AA′ de manière à amener en M leurs points d'application ; leur résultante sera appliquée en M, c'est-à-dire que le centre de gravité sera... où l'on voudra. L'absurdité d'un tel raisonnement saute aux yeux, et l'on pourrait trouver cet exemple excessif ; si je l'ai cité, c'est que, pour le centre de gravité du trapèze, on a pendant assez longtemps propagé, parmi les étudiants en Mathématique, une méthode qui, au fond, présentait le même paralogisme, mais plus habilement masqué. Et le raisonnement était emprunté à un professeur, très remarquable et fort incapable d'une telle énormité, mais qui avait été mal compris en cette circonstance.

Les développements pris par les diverses branches de la Géométrie, en n'invoquant même pas les résultats que l'on doit au calcul, sont tels aujourd'hui que la plus grande difficulté de l'enseignement est peut-être d'en bien fixer les limites. Comme nous parlons seulement ici des éléments, c'est parmi les notions définitivement acquises qu'il faut exclusivement chercher les matériaux, et non pas dans les partie de la Science qui font encore l'objet de recherches et sur lesquelles s'exerce chaque jour la sagacité de nombreux savants qui cherchent et trouvent des vérités nouvelles.

Mais la question étant ainsi simplifiée, on constate que l'exposé des vérités géométriques aujourd'hui connues et définitivement fixées dépasserait non seulement la durée dont on peut disposer pour un enseignement rationnel, mais probablement la vie d'un homme.

Il s'agit donc d'opérer un triage, et cela d'après les principes suivants : s'attacher aux méthodes qui donneront des propositions en foule, plutôt qu'aux propositions particulières ; retenir de celles-ci quelques exemples types montrant ce que peuvent donner les méthodes, et quelques vérités pouvant entraîner des conséquences utiles pour la suite, ou se prêter à d'importantes applications.

En entrant dans cette voie, on s'éloigne singulièrement de

l'ancien plan de la Géométrie classique, mais on donne à cette partie de l'enseignement la vie et l'intérêt dont elle devenait de plus en plus dépourvue.

Enfin, dans le haut enseignement, où se font connaître les progrès actuels de la Science, et qui contribue à ces progrès, il y aura place pour tous les aperçus permettant d'ouvrir de nouvelles voies aux auditeurs, qui sont eux-mêmes des chercheurs et quelquefois des savants ; mais c'est toujours en s'attachant plus aux méthodes qu'aux vérités de détail qu'il deviendra possible d'atteindre ce résultat.

CHAPITRE V.

ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

La Géométrie analytique fait partie intégrale de tout enseignement mathématique un peu complet, même d'un enseignement élémentaire, sauf à la restreindre, en ce cas, à ses premiers chapitres. En employant cette expression « fait partie », je ne m'exprime pas tout à fait bien. C'est « devrait faire partie » qu'il serait mieux de dire. Mais il est entendu que nous indiquons à grands traits les lignes d'un enseignement idéal, facile à mettre en pratique, qui n'a rien de commun avec l'état actuel des choses.

La définition des coordonnées, leur transformation, la théorie de la ligne droite n'exigent que des connaissances simples en Algèbre et en Géométrie. Mais, pour tirer de la Géométrie analytique les résultats généraux qu'elle fournit, pour pouvoir mettre en lumière la puissance et la fécondité de cette science, quelques notions de Calcul infinitésimal sont nécessaires. Il est bon, d'après cela, de faire coïncider le début de l'enseignement de la Géométrie analytique avec les premières notions sur les dérivées, et de poursuivre parallèlement ces deux études.

En caractérisant plus haut la Science dont nous nous occupons ici au point de vue de l'enseignement, j'ai rappelé comment on en avait pendant trop longtemps méconnu l'esprit. C'est une critique qui ne date pas d'hier. Lacroix, dans ses remarquables *Essais sur l'enseignement* (1828), après avoir indiqué les tentatives de Newton et de ses successeurs pour étudier les courbes du troisième et du quatrième ordres, s'exprime en ces termes :

« Persuadés qu'il fallait renoncer à faire une revue générale des courbes, les géomètres sentirent que cette partie aurait atteint toute la perfection dont elle était susceptible,

si elle fournissait des méthodes pour déterminer, par l'équation d'une courbe, ses principales propriétés et les diverses circonstances de son cours ; et c'est là ce qu'ont fait Euler et Cramer, et ce que le calcul différentiel facilite beaucoup.

« Il semblait donc naturel de revenir sur ses pas, et de rattacher à un même fil toute la théorie des lignes droites ou courbes, classées naturellement par leurs équations ; c'est cependant ce qu'on ne fit point. La force de l'habitude engagea encore les géomètres à amalgamer, pour ainsi dire, les méthodes anciennes avec les nouvelles ; et cet assemblage informe portait toujours l'empreinte des premiers temps de la Science. »

Insistant plus loin sur la nécessité du triage des propositions qui doivent constituer la base de l'enseignement : « Qu'est-il besoin, ajoute-t-il, de se perdre dans une multitude de propositions, dans une variété de méthodes, qui ne font qu'éblouir les commençants, et leur faire passer sur le même résultat un temps qu'ils emploieraient à en apprendre de nouveaux?... tout ce qui n'augmente pas la puissance des méthodes ou qui n'abrège pas la chaîne qui lie les résultats entre eux, ne doit pas entrer dans les éléments ».

Malgré les progrès de la Science ou, pour mieux dire, à cause des progrès de la Science depuis l'époque où Lacroix s'exprimait ainsi, ce sont encore aujourd'hui d'excellentes maximes, des indications générales précieuses dont doivent s'inspirer ceux qui ont à enseigner la Géométrie analytique.

Il y a cependant un double écueil à éviter, on doit le reconnaître très franchement. Par des études trop particulières, on enlève à la Science toute sa portée ; mais, si le développement des méthodes générales est donné sans certaines précautions, de nouveaux inconvénients se produisent. Un élève ayant en sa possession, d'une façon irréprochable, les méthodes dont nous parlons, et se trouvant en présence d'une question des plus simples, a fréquemment recours à ces instruments puissants, au lieu d'étudier le problème qui lui est soumis et d'y appliquer sa raison. Il développe de longs calculs, invoque des théories plus ou

moins élevées pour découvrir un résultat qu'un peu d'attention et de logique lui aurait permis de reconnaître immédiatement. C'est la traditionnelle image de l'homme qui prend une massue pour assommer une mouche. Il importe de bien persuader aux élèves, cependant, que, si les méthodes générales sont des instruments précieux, elles ne dispensent pas de raisonner, que la sagacité conserve toujours sa valeur, que la Géométrie analytique est une science géométrique, qu'y voir un prétexte à étalages de calculs sans fin est une conception fausse, que la complication de l'appareil algébrique doit être en rapport avec la difficulté de la question de Géométrie correspondante.

Pour montrer tout cela, il ne suffit pas de le dire : il faut le prouver ; on le prouvera par de continuels exercices, rapprochés des méthodes elles-mêmes, et en indiquant bien l'usage. On pourra se convaincre alors que cet usage n'entraîne jamais comme conséquence la non-intervention du raisonnement. Réduire les méthodes de Géométrie analytique à un rôle purement mécanique, c'est en méconnaître l'esprit et la portée. Le calcul automatique venant se substituer à un examen judicieux des questions, ce n'est pas là de la science ; cet examen doit invariablement précéder l'application du calcul, ne fût-ce que pour déterminer le choix entre les divers chemins qu'on peut suivre, et le calcul ne doit venir qu'à son heure, et quand on l'appelle, comme un serviteur fidèle, et non comme un maître impérieux.

J'ai parlé déjà de l'intérêt que présente une comparaison entre les résultats relatifs à la Géométrie du plan et ceux de la Géométrie de l'espace ; c'est surtout à l'enseignement que s'applique cette observation. Si l'on entrait franchement dans cette voie, il ne serait pas étonnant qu'on pût, d'ici quelques années, arriver à présenter à la fois les principales théories du plan et de l'espace, à gagner ainsi du temps et à donner plus de portée à l'esprit, en lui présentant des analogies qui, bien souvent, lui échappent.

Dans le développement de la Géométrie analytique élémentaire, en dépit de l'importance qu'y doivent prendre les théories générales, il restera toujours une place sérieuse pour l'étude des coniques et des quadriques. Il y a pour cela

deux raisons : la première consiste dans les nombreuses applications des propriétés de ces figures ; la seconde, c'est qu'elles offrent les exemples les plus simples et les plus saisissables qu'on puisse invoquer pour mettre en œuvre les méthodes.

Seulement, cette étude, au lieu d'être détaillée, poursuivie jusqu'aux dernières limites, doit rigoureusement se circonscrire, s'appliquer aux propriétés essentielles, laissant les autres dans la pénombre en indiquant seulement les sentiers par lesquels il serait possible de les aller trouver. Dans toute partie de la Géométrie analytique, de larges appels devront être faits à la Géométrie moderne, et fourniront l'occasion de montrer incessamment à quel point le Calcul et la Géométrie pure sont des forces à associer entre elles au lieu de vouloir les opposer l'une à l'autre.

Il serait essentiel, dans l'étude des coordonnées cartésiennes, de donner plus d'attention qu'on ne le fait d'habitude à la correspondance entre les figures et les symboles par lesquels on les représente : j'ai sommairement indiqué plus haut cette question de la représentation analytique des figures et je ne veux pas y revenir.

Le plus généralement, après avoir traité indifféremment par les coordonnées obliques ou par les coordonnées rectangulaires la majorité des questions en Géométrie plane, on se restreint aux coordonnées rectangulaires lorsqu'il s'agit de la Géométrie de l'espace. Une des raisons les plus plausibles pour en agir ainsi, c'est la complexité des calculs ; dès qu'il s'agit surtout de propositions où entrent les notions d'angles et de distances, la comparaison n'est certes pas à l'avantage des coordonnées obliques. Cependant, on peut regretter de voir certaines théories se particulariser ainsi d'une façon excessive ; ce serait un réel progrès s'il était possible, par des notations nouvelles convenablement établies, de donner plus de généralité à l'exposition des principales méthodes, les coordonnées rectangulaires n'étant alors qu'un cas particulier, lequel resterait quand même avantageux à employer dans un très grand nombre d'applications. Ce progrès, il est permis d'espérer qu'il se réalisera quelque jour; mais il est plutôt d'ordre algébrique que d'ordre géométrique, puisqu'il consiste dans une simplification des symboles, permettant

d'exprimer les mêmes vérités, de leur faire subir les mêmes transformations avec des écritures plus concises. Cette remarque, dans tous les cas, ne constitue pas une critique, puisque l'outillage nouveau qui serait nécessaire est encore à trouver ; c'est simplement un desideratum portant sur l'enseignement de l'avenir, et qui reste subordonné à des perfectionnements algébriques, possibles à notre avis (1).

Dans les cours de Géométrie analytique, on étudie surtout, et c'est avec raison, les coordonnées cartésiennes ; on consacre aussi un certain nombre de leçons aux coordonnées polaires, en développant même dans ce système plusieurs théories générales. Mais on se borne généralement là, et c'est tout au plus si l'on a donné très rapidement au début quelque indication sur ce que sont les coordonnées en général.

Il serait bon d'étendre un peu ces notions, d'indiquer un certain nombre des systèmes de coordonnées qui ont été proposés, avec quelques exemples montrant ce que deviennent des équations de courbes particulières dans ces systèmes. Mais, en outre, les coordonnées trilinéaires, qui, d'ailleurs, figurent dans plusieurs ouvrages classiques, mériteraient d'être enseignées d'une façon plus régulière et plus générale. Il est bien entendu que nous entendons ici parler des coordonnées tangentielles aussi bien que des coordonnées ponctuelles. Cette introduction des coordonnées trilinéaires offre, en effet, plusieurs avantages : elle est tout d'abord intéressante en raison de ses très nombreuses applications ; en outre, elle établit un rapport plus direct, en bien des circonstances, entre les faits géométriques et les symboles destinés à les traduire; enfin, on y trouve un exemple donnant de l'homogénéité des coordonnées une explication visible. Lorsque au contraire on se borne à définir les coordonnées homogènes en remplaçant x, y par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, pour faire ensuite $t = 1$, il semble aux commençants que c'est là un pur artifice

(1) Voir une brochure de M. le Commandant Ripert : *La Dualité et l'Homographie dans le Triangle et le Tétraèdre* (1898), publiée en supplément à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. L'Auteur, aujourd'hui décédé, projetait de faire paraître, sous le titre : *Éléments comparés de Géométrie analytique*, un volume qui, malheureusement, ne fut pas publié.

algébrique, qui n'a pas de raison d'être géométrique, et qui se trouve, comme par une sorte de hasard, conduire à des résultats utiles. Notons encore que les coordonnées trilinéaires, pouvant prendre autant de formes qu'on voudra, parmi lesquelles les coordonnées barycentriques et les coordonnées normales sont les plus simples et les plus employées, fournissent l'occasion de montrer toute l'extension dont l'idée fondamentale est susceptible.

Il va de soi que tout ce que nous venons de dire sur les coordonnées trilinéaires doit s'étendre pour l'espace à celles qu'on définit au moyen d'un tétraèdre de référence, puisque c'est au fond la même idée fondamentale qu'il s'agit de mettre en lumière.

Dans toute cette partie élémentaire de l'enseignement de la Géométrie analytique, les deux problèmes essentiels sont toujours les suivants : « Connaissant une figure, déterminer son équation ; connaissant l'équation, déterminer la figure, et acquérir le plus de renseignements qu'on le pourra sur ses diverses propriétés. » C'est surtout le dernier qui se présente le plus souvent, et c'est seulement par des exercices répétés qu'on parvient à le résoudre. Malheureusement ces exercices ne sauraient, pour les figures de l'espace, se traduire effectivement par des tracés ; on pourrait bien, dans quelques cas particuliers, construire, par génératrices rectilignes ou autrement, des modèles de surfaces ; mais ce serait une perte de temps considérable. Au contraire, les contructions de courbes planes constituent des exercices rapides et très fructueux pour l'esprit. On peut faire ces constructions dans les divers systèmes de coordonnées dont nous avons parlé ; mais c'est principalement en coordonnées rectilignes (et même rectangulaires) et aussi en coordonnées polaires qu'il convient de les multiplier. Ces exercices étaient jadis en grande faveur ; on semble les avoir un peu abandonnés, ce qui est une chose fâcheuse ; il est probable que la surcharge des programmes sur d'autres points a contribué à cet abandon.

On est en effet, dans cette question de la construction des courbes, pris entre deux difficultés : si l'on se contente de tracés par à peu près, de figures sans aucun souci d'échelle,

on n'y apprend pas grand'chose, et l'on s'expose même quelquefois à des erreurs capitales ; si l'on cherche au contraire à obtenir des dessins exacts, en se servant de la règle et du compas, si l'on trace de véritables épures, c'est une consommation de temps exagérée.

Il y aurait un moyen pratique, et fort simple, de concilier tout cela. Il suffirait d'avoir un papier quadrillé spécial, à très petits carreaux, destiné à la construction des courbes ; cela permettrait de faire à main levée des croquis d'une exactitude largement suffisante. De même, pour les coordonnées polaires, des feuilles sur lesquelles seraient tracées d'avance de nombreuses circonférences concentriques, également espacées, et des droites régulièrement rayonnantes autour du centre, fourniraient le moyen d'obtenir un résultat analogue.

De pareils albums, en les limitant aux courbes les plus importantes et remarquables, seraient pour les élèves qui les auraient confectionnés de précieux auxiliaires. Sur chaque feuille on pourrait rappeler l'équation de la courbe, quelques formules remarquables s'y rapportant, les plus importantes de ses propriétés. Ce recueil aiderait la mémoire ; et les tracés auraient été effectués dans ces conditions avec une dépense de temps bien minime.

J'ai essayé plus haut de faire ressortir l'importance philosophique du calcul géométrique en général. En matière d'enseignement, cette importance est capitale ; et cependant combien d'élèves, parmi les plus distingués, ignorent même jusqu'au nom de « calcul géométrique » ! A cette lacune systématique on ne saurait trouver d'autre explication que l'incurable paresse de l'esprit humain, laquelle le porte à ne pas vouloir changer ses habitudes jusqu'au jour où les progrès accomplis viennent le forcer à l'emploi de méthodes nouvelles.

C'est en Géométrie analytique plane surtout que cette résistance à l'introduction du calcul géométrique devient incompréhensible. Là, pas de symboles nouveaux, pas de règles spéciales de calcul ; la méthode des équipollences amène à l'emploi des opérations courantes qui se font sur les imaginaires. Les notions sur ce qu'on appelle si impro-

prement l'interprétation géométrique des imaginaires sont données (mal données en général, il est vrai) au cours de l'Algèbre ; et aussitôt que de ces opérations, de ces connaissances élémentaires, il s'offre une occasion de tirer des résultats utiles, on s'arrête, on s'y refuse, on persiste avec une sorte de fureur à piétiner dans la vieille ornière.

L'application des équipollences, cependant, donne à l'étude de certaines questions une simplicité pour ainsi dire intuitive; en même temps qu'elle épargne le calcul, elle éclaire les faits. Elle dispense de l'emploi des coordonnées, mais permet de revenir à tout instant à cet emploi, si l'on y reconnaît un avantage. La transformation des coordonnées, notamment, devient avec les équipollences un problème pour ainsi dire enfantin ; il faut trois ou quatre lignes d'écriture et dix minutes d'attention pour un sujet auquel on consacrait parfois deux leçons, et qui, pour les commençants, n'était pas toujours facile. C'est enfin par les équipollences qu'on peut arriver à avoir des vues précises sur la représentation analytique des figures. En dépit de tant d'avantages, la belle méthode de Géométrie analytique créée par Bellavitis reste à peu près inutilisée, ou plutôt ne s'introduit que par fragments, d'une façon détournée, sans suite, sans lien, sans l'unité qui la caractérise et contribue à lui donner sa haute valeur.

Il est vrai de dire que jamais le progrès ne s'accomplit dans le monde d'une façon régulière et normale, ni conformément aux règles de la raison.

En ce qui regarde la Géométrie analytique de l'espace, le calcul géométrique représenté par la méthode des quaternions présente dans son introduction de plus grandes difficultés, en raison de l'Algèbre spéciale qu'elle applique. Quelques éléments sommaires seraient cependant faciles à enseigner, et l'on en retirerait un grand profit. Il faut reconnaître néanmoins qu'un mot emprunté à cette méthode, celui de « vecteur », a fini par pénétrer dans l'enseignement après bien des efforts ; malheureusement, si l'on excepte un petit nombre de professeurs, le mot n'a pas été accompagné de l'idée, ce qui serait mieux encore; on peut espérer que ce sera l'œuvre de l'avenir.

Enfin, d'une façon plus générale, la méthode de Grassmann,

mise sous une forme accessible et réduite à des limites raisonnables, devrait aussi être enseignée dans tous les cours de Géométrie analytique. Rien que la connaissance de ses principes essentiels suffirait à lever bien des difficultés, à éclairer bien des sujets, à éviter bien des calculs inutiles.

Nous ne sommes pas encore arrivés à l'heure où le calcul géométrique, sous aucune de ses formes, pourra être accepté dans l'enseignement, sans réticences et avec gratitude pour les bienfaits qu'il apporte. On le regarde d'un mauvais œil. On serait tenté de se demander si l'on ne tient pas rigueur à ce malappris de sa simplicité même ; il n'est pas mis avec recherche, dit les choses comme elles sont, n'a pas le souci de la mode. Il pourrait arriver, s'il prenait trop d'importance, à réduire à soixante pages des œuvres qui en contiennent mille, sans leur enlever rien d'essentiel. Cela peut expliquer certaines résistances et certaines terreurs ; on pourrait ajouter « certaines colères », bien que cela paraisse invraisemblable à propos d'un pareil sujet, et l'on ne sortirait pas de la vérité. La seule introduction du mot « vecteur » dans la langue scientifique classique a déterminé de véritables crises, chez des esprits d'ailleurs très distingués. On doit bien se rendre compte d'une chose : c'est que la préciosité, la recherche de l'élégance dans la forme sans trop se soucier du fond, ne sont pas des qualités (?) exclusivement littéraires, à l'époque où nous sommes ; les savants n'en sont pas tous exempts, et les académies n'anéantissent pas ces vertus (que l'on a le droit de tenir pour des défauts). On a même quelquefois soutenu qu'elles tendraient au contraire à les développer.

Mais le jour où le calcul géométrique s'imposera dans l'enseignement aussi bien que dans la Science est peut-être plus proche qu'on ne croit. Quand auront disparu certaines générations, disparaîtront du même coup certaines résistances. La Science a ses nécessités auxquelles il faut bien finir par céder ; et, grâce à la nécessité, il arrivera un instant où l'on ne pourra plus continuer, par dilettantisme, à compliquer les idées simples, à faire des calculs pour le plaisir d'en faire, et à refuser le secours des diverses méthodes que nous venons d'énumérer. Ce sera un jour de deuil peut-être pour

les admirateurs de l'archéologie scientifique, mais de ce jour pourront dater de grands progrès intellectuels.

L'enseignement de la Géométrie analytique doit être complété par celui de la Cinématique. En réalité, lorsqu'on étudie une courbe en exprimant les coordonnées de chacun de ses points en fonctions d'un paramètre, il suffit de supposer que ce paramètre représente le temps pour avoir les équations du mouvement d'un point dont la courbe en question devient alors la trajectoire. Il est vrai que, quand on se place à ce nouveau point de vue, un certain nombre de notions s'introduisent, comme les vitesses, les accélérations des divers ordres, les vitesses aréolaires, par exemple, et que ces notions n'appartiennent pas directement à la Géométrie analytique. Mais les moyens à mettre en œuvre sont tellement empruntés à cette dernière, qu'il n'y a pas d'hésitation possible. Il est d'ailleurs digne de remarque que cette étude particulière de la Cinématique réagit, ainsi qu'on pouvait s'y attendre, sur un grand nombre de questions appartenant à la Géométrie elle-même, en les éclairant d'une lumière nouvelle.

Il convient de diviser l'enseignement de la Cinématique, comme celui de la Géométrie analytique, en deux parties essentielles : Cinématique plane, Cinématique de l'espace, ce qui n'empêche d'ailleurs pas de faire ressortir les analogies, en profitant de tous les résultats obtenus pour des questions simples, de manière à les étendre, lorsque cela se peut, à des questions plus complexes. La différence entre le plan et l'espace est ici plus profonde qu'en Géométrie, et cela tient à la nature même des choses. Le mouvement des figures planes dans le plan qui les contient se réduit, d'après le célèbre théorème de Chasles, l'un des plus simples et des plus beaux de la Géométrie, à de simples rotations infinitésimales, et conduit à la théorie si féconde du *centre instantané de rotation*. Ces notions peuvent aussi s'étendre aux figures mobiles à la surface d'une sphère. Dans l'espace, au contraire, le mouvement élémentaire d'un solide invariable est complexe; il correspond à celui d'une vis, c'est-à-dire à un glissement le long d'un axe et à une rotation simultanée autour de cet axe. Cet *axe instantané de rotation et de glissement,* se sub-

stituant au centre instantané de tout à l'heure, suffit à faire deviner combien les difficultés seront plus grandes, combien les calculs seront plus compliqués, lorsqu'on passera du plan à l'espace.

J'ai à peine besoin de faire remarquer que les avantages du calcul géométrique indiqués tout à l'heure seront peut-être plus grands encore dans toute cette étude de la Cinématique que dans le domaine de la simple Géométrie analytique.

Nous ne parlons que pour mémoire, en terminant, des théories élevées de la Géométrie analytique ou de la Cinématique. Si considérables qu'aient été les progrès de ces deux Sciences, il reste encore un champ indéfini ouvert aux savants et aux chercheurs. Dans la théorie des courbes, dans celle des surfaces, dans la science des mouvements dans l'espace, bien des points ne sont pas élucidés, bien des problèmes restent sans solution ou avec des solutions incomplètes. Les aperçus qui peuvent provoquer des découvertes nouvelles appartiennent, ici comme dans toutes les autres branches, à cet enseignement exceptionnel, qui échappe à toute règle par l'élévation même de son niveau, ou plutôt qui ne connaît d'autres règles que celles résultant du talent des professeurs.

CHAPITRE VI.

ENSEIGNEMENT DE LA MÉCANIQUE.

On a longtemps caressé le rêve, qui ne semble encore pas abandonné à l'heure actuelle, de constituer un enseignement élémentaire de la Mécanique; j'entends par là un enseignement donné à des élèves n'ayant aucune notion de Calcul infinitésimal, ne sachant pas ce que c'est qu'une dérivée, possédant seulement les éléments de Géométrie, quelques notions de calcul algébrique et la connaissance des équations des deux premiers degrés. Il existe un grand nombre de programmes où se trouve ainsi indiqué l'enseignement de la Mécanique; l'usage s'est même établi d'opposer les deux expressions « Mécanique élémentaire » et « Mécanique rationnelle ». A les prendre dans le sens littéral, rien ne serait plus justifié qu'une telle opposition; il semblerait en résulter en effet que l'enseignement de la Mécanique élémentaire est irrationnel, c'est-à-dire peu conforme à la raison.

L'idée de donner un enseignement de la Mécanique sans les éléments de calcul indispensables est une pure chimère; on peut mettre tout ce qu'on voudra dans des programmes quelconques; on peut par des prodiges d'habileté s'efforcer à présenter à des élèves des notions incompréhensibles pour eux, en escamotant les difficultés, mais on ne saurait triompher d'une impossibilité radicale absolue, et enseigner une Science qui met en œuvre à tout instant les raisonnements du Calcul infinitésimal, sans que les auditeurs aient au moins quelques premières notions de ce Calcul. Sinon, on n'obtient qu'un résultat : semer des idées fausses, jeter le doute et le découragement chez les élèves qui raisonnent, donner aux autres l'illusion qu'ils savent quelque chose, alors qu'ils n'ont rien compris. C'est assez régulièrement le produit de l'enseignement fantôme dont il s'agit. On reste

confondu quand on voit, par exemple, figurer dans des programmes de baccalauréat, sous le nom de Mécanique : 1° des éléments de Statique ; 2° des études sur les machines simples ; 3° des éléments de Cinématique et de Dynamique ; 4° des notions sur le travail des forces.

S'il s'agissait, non pas d'un enseignement suivi, mais de certains aperçus généraux destinés soit à des gens du monde soit à des personnes dont la profession confine aux applications de la Mécanique, il en irait autrement. Quelques conférences, bien faites, par des professeurs ayant une connaissance profonde du sujet, pourraient alors être très utiles et laisser dans l'esprit des traces effectives et des idées justes ; c'est qu'alors on suppose connues les notions dont on a besoin ; on cherche à faire comprendre les choses dans leur ensemble, non pas à les démontrer avec une rigueur scientifique. Mais l'incorporation dans un enseignement suivi est difficile à expliquer.

On finit pourtant par en trouver les motifs dans deux pensées contradictoires, dont l'une est juste, et l'autre erronée : 1° La Mécanique, au point de vue des applications, est tellement importante qu'il faut tâcher d'en donner au moins quelques notions à tous les jeunes gens d'une instruction moyenne ; 2° Comme à ces élèves nous ne pouvons pas faire connaître les éléments du Calcul infinitésimal, arrangeons-nous pour nous en passer.

La première proposition est d'une vérité incontestable ; la seconde renferme une erreur capitale. Sans ces premières données sur le Calcul infinitésimal en effet, il n'y a pas de culture mathématique, il n'y a pas de perfectionnement de l'intelligence, et surtout de possibilité d'applications ; il reste un fatras de propositions surchargeant la mémoire, une grande fatigue de l'esprit et une forte rancune contre des études si peu attrayantes.

Ce point est à mon avis d'une importance capitale. Ceux qui n'ont pas poussé assez avant leurs études mathématiques *ne peuvent pas* acquérir des notions de Mécanique.

Ils auront peut-être, par la pratique, des connaissances utiles sur les machines ou le jeu des forces ; ils seront capables, par intelligence naturelle et par une sorte d'intuition, de donner de très bons avis sur une question déter-

minée ; mais cela n'a rien de commun avec une instruction scientifique, raisonnée, qui exige l'intervention des moyens de calcul indispensables.

Laissant donc de côté cet enseignement inutile et nuisible, je suppose un élève en possession des éléments d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie, ayant quelques notions de Calcul infinitésimal et une connaissance suffisante de la Géométrie analytique. Comme complément de la Géométrie, il a reçu un enseignement portant sur la Statique et la Géométrie des masses ; comme complément de la Géométrie analytique, il s'est au moins initié à la Cinématique, s'il n'en a pas poussé jusqu'au bout l'étude classique.

Dans ces conditions, et seulement dans ces conditions, il est apte à entreprendre l'étude de la Mécanique rationnelle, ou si l'on veut de la Dynamique. Le professeur chargé de distribuer cet enseignement n'aura pas une tâche très facile à remplir, malgré cette préparation antérieure. On est encore dans la Science pure, mais aux confins des sciences naturelles ; les entités sur lesquelles on va avoir à opérer sont par nature complètement nouvelles ; les principes sur lesquels on s'appuiera sont le résultat de l'observation, mais d'une manière indirecte ; et il faut cependant qu'il ne reste aucun doute dans les esprits ; il faut que ces principes s'y accrochent avec autant de solidité que le feraient de purs axiomes de Géométrie. De là, pour le professeur, l'obligation de consacrer, dès le début, un soin extrême aux idées générales, aux définitions, à l'exposé des principes fondamentaux. Pour que cet enseignement d'une science pure soit vivant et fécond, il est besoin de recourir à tout instant à la science appliquée, de montrer par des exemples tangibles empruntés au monde réel comment s'établit le lien entre la théorie pure et la pratique effective. Et il en sera ainsi pendant tout le développement de la Mécanique rationnelle ; réduite à son rôle purement philosophique, elle ne pourrait guère apparaître que sous la forme d'un exercice de l'intelligence, combinant les vérités de la Géométrie et du Calcul pour résoudre les problèmes qui concernent des abstractions n'existant pas réellement. Se jetant au contraire du côté des applications en faisant trop pencher la

balance, elle perdrait son caractère de science pure à laquelle est due sa grande puissance.

On voit combien la question est délicate, combien la mesure précise est difficile à garder pour intéresser toujours l'auditeur, lui laisser entrevoir, lui prouver même l'utilité pratique de la Science, sans permettre jamais à une idée fausse de pénétrer dans son esprit, sans lui laisser cette impression pénible qu'on ne lui a donné que des raisonnements par à peu près. C'est par une préoccupation constante des origines intellectuelles de la Mécanique qu'on arrivera à sortir de ce labyrinthe et à mettre un ordre parfait dans cet apparent chaos. Il ne faudra pas craindre de répéter à satiété, à propos de chaque exemple invoqué, que l'être de raison et l'être réel ne sont en rien assimilables ; mais que le premier ne résultant que d'abstractions opérées sur le second, d'hypothèses faites une fois pour toutes, si ces hypothèses sont presque réalisées, le résultat fourni par la Mécanique rationnelle sera presque exact ; et l'on profitera de l'occasion pour rappeler que ce mot « presque » renferme l'expression de la perfection mathématique en matière d'application au monde réel, parce qu'aucune grandeur du monde réel ne nous est connue d'une façon absolue.

C'est à ce prix, et avec beaucoup de patience et de suite, qu'on arrivera à pouvoir développer l'enseignement de la Mécanique rationnelle d'une façon logique et harmonieuse, tout en faisant dans le domaine de la Mécanique appliquée de très fréquentes incursions, qui sont indispensables.

Le développement de cet enseignement peut avoir une étendue assez variable. Il comprendra successivement, suivant l'ordre logique qui consiste à passer progressivement des questions simples à celles d'une plus grande complexité, la Dynamique du point matériel d'abord, puis celle des systèmes libres et enfin des systèmes à liaisons. Les mouvements de rotation des solides invariables, soit autour d'un axe, soit autour d'un point fixe, doivent prendre une place importante ; nous citerons enfin les problèmes d'équilibre déjà mentionnés plus haut, tels que l'équilibre des cordons par exemple, l'étude des percussions et des chocs, des notions d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique.

Mais dans chacune de ces parties, et dans plusieurs autres que nous passons volontairement sous silence, le champ des développements peut être très restreint ou s'étendre pour ainsi dire à l'infini, alors même qu'on reste rigoureusement dans les limites de la Mécanique rationnelle, et cela se produira d'une façon bien plus complète encore du moment où l'on abordera les applications. Rien que pour les machines, il serait possible d'étendre son enseignement sur de nombreuses années, et l'on n'aurait pas encore épuisé le sujet.

Il est certain que si l'on se bornait exclusivement aux principes et à des méthodes générales, il ne faudrait pas un grand nombre de leçons pour présenter l'ensemble de la science du mouvement. Seulement, un tel enseignement serait à la fois inutile et dénué d'intérêt. Si la Mécanique met en œuvre les plus belles théories du Calcul infinitésimal et de la Géométrie, c'est surtout dans les exemples particuliers qu'on aperçoit les heureux résultats de cette intervention; les théories tout à fait générales ne pourraient donc constituer qu'un enseignement sans vie, et qui ne donnerait même pas à l'esprit les satisfactions qu'on attend de la science pure. Il faut ajouter que, d'instinct, on sent très bien l'impossibilité de concevoir la Mécanique indépendamment des applications en vue desquelles elle a été constituée; et cela entraîne la nécessité de s'orienter vers ces applications futures par des exercices, des cas particuliers permettant de montrer le parti qu'on peut tirer de chacune des théories successivement exposées.

D'autre part, la multiplication trop grande des exemples particuliers empêcherait de suivre le développement normal de la Dynamique et amènerait à des idées fausses sur le caractère de la science du mouvement. Il y a donc une mesure à garder, et l'on ne peut essayer de la préciser une fois pour toutes, à l'avance, d'une façon invariable. Il faut se rendre compte du temps total dont on dispose, de la nature de l'auditoire et par conséquent du but à poursuivre. Il est bien clair, par exemple, que les notions de Mécanique données à de futurs professeurs ne sauraient être présentées dans le même esprit que s'il s'agit de jeunes gens appelés à bref délai, comme ingénieurs, à appliquer pratiquement l'enseignement qu'ils reçoivent. Toutes ces considérations

montrent que la tâche d'un professeur de Mécanique est l'une des plus délicates qui se puissent présenter dans tout l'enseignement de la Mathématique ; plus qu'aucun autre, il doit être conduit, en dépit de son expérience antérieure, à de perpétuels perfectionnements, à des simplifications, des additions ou des retranchements, sans parler des changements que les progrès de la Science lui imposent.

Il me semble bon de signaler au passage le grand intérêt que présente en Mécanique l'étude de certaines questions paradoxales. Lorsqu'on s'y trouve conduit, on doit bien se garder de les éviter ; il faut au contraire aller très franchement au-devant d'elles, et profiter de l'occasion pour les analyser, pour remonter aux causes et montrer à quelles interprétations concrètes se prêtent de pareils résultats. En principe, on ne doit pas s'étonner qu'ils puissent se produire, si l'on se reporte toujours aux origines mêmes de la science du mouvement ; une fois créées les abstractions, une fois qu'elles sont livrées au calcul, ce dernier s'en empare sans que les équations puissent faire entrer en ligne les données primitives ; il ne s'agit plus que d'un problème de Mathématique pure, dont la solution ne s'adaptera pas nécessairement au problème correspondant que présenterait la nature. Dans cet ordre d'idées d'une importance spéciale, on peut notamment signaler les questions dans lesquelles viennent s'introduire des vitesses infinies. M. Léauté, dans son cours de l'École Polytechnique, en donne un exemple, dans le cas du mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant la loi de Newton, la vitesse initiale passant par ce centre, et il produit à ce propos des réflexions profondément justes, et que je demande au lecteur la permission de rappeler ici, au moins par extraits. Elles éclairent en effet d'une façon frappante le problème des cas limites en Mécanique rationnelle.

« Lorsque le mobile se dirige vers l'origine, il y arrive avec une vitesse infinie. A partir de cet instant, on ne peut plus rien dire sur le mouvement ; non seulement parce que les formules ne sont plus applicables, mais parce que le mouvement subséquent est en réalité indéterminé. Le cas de la vitesse infinie est en effet un cas limite, et pour savoir ce

qui se passe au moment où les formules ne donnent plus rien, il faut savoir comment l'on est arrivé à la limite.

» Le problème du mouvement d'un point M, lancé suivant MO, et attiré par l'origine fixe O, en raison inverse du carré de la distance, peut être considéré comme cas limite des deux problèmes suivants :

» 1° *La loi d'attraction restant la même, la vitesse initiale est dirigée en dehors de* MO *et tend ensuite vers* MO;

» 2° *La vitesse initiale étant dirigée suivant* MO, *il y a deux centres d'attraction* O′ *et* O″, *symétriques par rapport à* MO, *et qui tendent ensuite à se confondre avec* O.

» Dans le premier problème, la trajectoire est une ellipse ayant O pour foyer; quand la direction de la vitesse initiale vient se confondre avec MO, cette ellipse s'aplatit indéfiniment: le mouvement est donc oscillatoire d'un même côté de O, c'est-à-dire que le mobile arrivé en O rebrousse chemin.

» Dans le second problème, le mouvement est rectiligne et oscillatoire de part et d'autre de O; à la limite, le mobile arrivé en O dépassera ce point.

» Chaque fois qu'on rencontre une vitesse infinie dans un problème, il peut être considéré comme le cas limite d'autres problèmes où ne se rencontreraient que des vitesses finies; et pour savoir ce qui se passe après l'instant où la vitesse infinie a été produite, il faut tenir compte des circonstances suivant lesquelles le cas limite a été atteint. »

Toutes les réflexions précédentes portent exclusivement sur l'enseignement de la Mécanique rationnelle, avec les emprunts indispensables à la Mécanique appliquée. Mais il existe en outre un grand nombre de cas où un enseignement complémentaire, ayant pour objet direct une catégorie particulière d'applications, doit être donné spécialement. La seule énumération des cours qui sont faits ou peuvent être faits ainsi dans les diverses écoles serait bien longue; citons seulement à titre d'exemples : les Machines, dont l'étude peut encore se subdiviser, d'après la nature des forces au moyen desquelles on se propose de produire du travail; la Résistance

des matériaux, l'Hydraulique, les Voûtes, les Murs de soutènement etc., sans parler des branches dans lesquelles les emprunts à la Physique viennent se combiner dans une plus forte proportion avec ceux que l'on fait à la Mécanique rationnelle.

Bien qu'aucun de ces renseignements particuliers ne rentre directement dans notre cadre, l'importance du sujet ne permet guère de passer complètement sous silence quelques observations très générales sur les principes qui doivent présider à l'enseignement de la Mécanique industrielle, c'est-à-dire de la théorie des Machines. Nous le ferons sommairement.

Si, pour donner cet enseignement, on se lançait successivement dans la description particulière de chacune des machines à étudier, on y perdrait un temps énorme, et l'on n'obtiendrait que de minces résultats. Tout d'abord, on resterait toujours incomplet, car chaque jour l'imagination des inventeurs produit par centaines de nouveaux engins mécaniques; et puis, ce qui est plus grave, on ne fournirait aucune ressource pour étudier et résoudre les questions qui se présenteront dans l'avenir, et qui portent plus souvent sur des machines à construire que sur des machines existantes. Il est donc essentiel de limiter la partie descriptive et l'étude détaillée du fonctionnement à un assez petit nombre de types.

Il est au contraire absolument nécessaire de grouper méthodiquement les idées générales qui se retrouveront uniformément dans toutes les applications, et qu'il nous faut rappeler à grands traits. Une machine, nous l'avons vu, est un transformateur de travail; mais le travail ne nous apparaissant pas toujours sous sa forme mécanique tangible, on a été conduit à la notion plus générale d'énergie. La théorie de l'énergie, déjà ébauchée en Mécanique rationnelle, et se complétant s'il le faut par des notions empruntées à la Physique, doit donc être le frontispice obligé d'une exposition de la théorie des Machines. Toute l'étude de la transmission du travail mérite d'être faite à ce point de vue avec un soin extrême. Accessoirement, les divers procédés permettant la mesure du travail doivent être nécessairement mis en lumière, et discutés en s'inspirant, non plus seulement

des résultats théoriques, mais aussi de ceux qui sont fournis par la pratique et l'expérience. Il en est de même pour les appareils destinés, soit à rendre les mouvements plus uniformes, comme les régulateurs, soit à accumuler la force vive, comme les volants, soit à la consommer en cas d'excès, comme les freins.

Entre les systèmes de la Mécanique rationnelle se rapprochant le plus des machines, et les machines réelles, il y a des différences profondes. Une machine est en apparence beaucoup plus simple qu'un système matériel quelconque, en ce que la plupart des mouvements se trouvent être d'une nature extrêmement élémentaire; nous ne voyons en effet guère autre chose, le plus souvent, que des mouvements de rotation autour d'axes fixes, et des mouvements rectilignes. Les obligations pratiques de la construction font qu'on ne sort guère de là.

Mais d'un autre côté, les forces que l'on peut supposer constantes dans beaucoup de considérations de Mécanique rationnelle sont en fait essentiellement variables, et, la plupart du temps, suivent des lois que l'expérience seule permet de déterminer. De là un abîme profond entre la science pure et l'application, entre la machine idéale que nous avons pu concevoir afin de la soumettre à la Mécanique rationnelle, et la Machine effective dont la première n'est que l'image simplifiée. Rien n'est plus facile par exemple, en théorie, que d'imaginer un mouvement uniforme; rien n'est plus absolument impossible à obtenir effectivement dans la pratique.

Il se produit à peu près ici le même fait qu'en Géométrie pour la ligne droite. Et ce qu'il faut retenir surtout, c'est qu'il ne s'agit plus de simples théories plus ou moins vagues, d'une portée exclusivement philosophique et constituant des jeux de l'esprit; les conséquences pratiques, effectives, des deux conceptions sont radicalement contraires, c'est-à-dire utiles ou nuisibles. Je n'en voudrais d'autre exemple que l'histoire des perfectionnements des instruments de régulation; pendant de longues années, on a poursuivi le rêve de régulateurs isochrones, tendant à obtenir l'uniformité absolue des mouvements; et l'on a fini par reconnaître, malgré toute l'ingé-

niosité dépensée dans ces recherches, que le problème des régulateurs de vitesse devait être envisagé de tout autre manière. Un régulateur parfaitement isochrone, en effet, est un instrument instable par essence, qui communique à la machine sa propre instabilité, et produit les oscillations à longues périodes, inadmissibles dans la pratique. On s'est appliqué alors à obtenir l'isochronisme approprié, c'est-à-dire à donner à la machine l'instrument le plus propre à assurer son état de régime, en tenant compte de ses conditions de marche, de l'énergie de son volant, etc. Là, comme il arrive fréquemment, le mieux était l'ennemi du bien; ou pour mieux dire, la perfection mathématique se traduisait par un résultat effectif mauvais. Nous vérifions sur ce cas particulier qu'une bonne solution approximative est de beaucoup supérieure à l'exactitude absolue; c'est sur cette vérité, qui cesserait d'en être une en Mathématique pure, que repose en grande partie la théorie des machines; on ne doit cesser de s'en inspirer dans une exposition systématique de cette partie si importante de la Mécanique appliquée.

Bien que la Cinématique soit par son essence même une branche de la Géométrie analytique, les applications effectives de cette partie de la science doivent être rattachées à l'enseignement de la Mécanique appliquée. La description et le fonctionnement des machines, en effet, reposent sur la connaissance des organes, de leur agencement et de leurs mouvements. L'étude générale de la Cinématique appliquée doit donc précéder le cours des Machines, de même que la Cinématique pure a servi d'introduction à la Dynamique rationnelle. Cette étude comprend dans son ensemble les transformations de mouvements. On a proposé à ce sujet bien des classifications successives; j'ignore si l'on pourra en découvrir une tout à fait satisfaisante, mais il ne m'apparaît pas que la question ait la haute importance qui lui a été longtemps attribuée. Dans une pareille étude, l'important est surtout de bien se rendre compte des conditions dans lesquelles pourront en général s'appliquer les résultats de la théorie; et en outre d'examiner avec des détails suffisants certaines transmissions d'un usage tout à fait fréquent, comme les engrenages, les systèmes articulés, les transmis-

sions par liens flexibles, pour nous borner à un très petit nombre d'exemples.

C'est à dessein que, dans ce chapitre, je n'ai fait aucune allusion jusqu'ici à l'enseignement de la plus belle des applications de la Mécanique : je veux parler de la Mécanique céleste. Il est en effet bien difficile de faire rentrer cette science dans le cadre régulier d'un enseignement de la Mathématique. Elle exige tant de préparation préalable, tant de travail soutenu, qu'en général la culture qu'on en fait constitue une profession ; autrement dit, la Mécanique céleste ne peut guère être enseignée qu'à des astronomes ou à de futurs astronomes.

Il peut y avoir des exceptions, mais rares. Un homme assez instruit en Mathématique pour suivre avec fruit un tel enseignement, sans y avoir aucun intérêt professionnel, y gagnerait assurément une grande supériorité. Ce caractère d'une science appliquée à laquelle vient s'adapter presque rigoureusement la science pure, n'appartient qu'à la Mécanique céleste, ainsi que nous l'avons vu, et lui assure une place éternellement privilégiée. Les théories élevées du Calcul infinitésimal ou du Calcul des fonctions y trouvent leur emploi; les plus intéressants problèmes de la philosophie naturelle y sont abordés. Quel plus magnifique complément d'une culture intellectuelle pourrait-on rêver?

Mais les conditions de l'existence moderne se prêtent mal, le plus souvent, à ces satisfactions purement intellectuelles, obtenues par un travail opiniâtre et prolongé. Ce n'est pas en quelques mois que peut s'enseigner l'Astronomie ; la plupart des hommes qui se consacrent à la Science sont obligés d'y trouver des ressources pour une carrière ; et les hommes de loisir, qui pourraient en profiter pour meubler leur esprit, sont rarement portés, dans notre monde actuel, vers la culture de la Mécanique céleste !

CHAPITRE VII.

LA HIÉRARCHIE DES ENSEIGNEMENTS (1).

L'enseignement se divise en France en trois degrés : l'enseignement primaire, l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Il semblerait que cela répond à peu près à trois catégories sociales d'ordre intellectuel : la masse, la classe moyenne, l'aristocratie. A chacune d'elles est attachée une sanction représentée par des diplômes : certificat d'études pour l'instruction primaire, baccalauréats pour l'instruction secondaire: licences et doctorats pour l'instruction supérieure. Telle est l'apparence, telle est la théorie. Il s'ensuit, avec l'universalité de l'enseignement primaire, qu'on atteint à ce maximum d'expression de la culture d'un peuple : tout le monde diplômé. C'est l'idéale conception de trois ordres de mandarinats : les mandarins de première classe en petit nombre, ceux de deuxième classe occupant cette situation moyenne qui exerce en résumé la plus grosse part d'influence, et fournit au recrutement de l'armée des fonctionnaires; enfin la troisième

(1) Dans ce dernier chapitre, comme dans ceux qu'on vient de lire, c'est exclusivement l'enseignement mathématique qu'on a en vue. Alors même que pour l'abréviation du langage on ne le répéterait pas expressément, il reste donc bien entendu que le mot « enseignement » conservera cette signification restreinte.

Nous ne nous dissimulons pas que les perfectionnements que réclamerait la culture intellectuelle de la jeunesse ne portent pas exclusivement sur ce point, qu'il existe une certaine solidarité entre les diverses branches des connaissances humaines, et qu'une réforme isolée ne serait pas réalisable en dehors d'un plan d'ensemble. Mais ce n'est pas cette réforme générale que nous proposons ici; nous tenons à rester exclusivement dans notre cadre; et les réflexions que nous présentons sont simplement des matériaux qui pourront être mis en œuvre lors de la reconstruction intellectuelle, inévitable dans un avenir plus ou moins lointain.

classe, renfermant tous les habitants du pays, hommes et femmes, non compris dans les deux premières classes, et pourvus chacun d'un certificat d'études. Pas un ignorant, pas un illettré, sauf les malheureux idiots ou les habitants des asiles d'aliénés; l'instruction est répandue à flots, largement, gratuitement; la nuit a cessé; la lumière intellectuelle éclaire tous les cerveaux, jusque dans les campagnes les plus reculées.

Les choses sont en fait beaucoup moins simples, et toute cette apparence est un vain mirage. Qu'on s'en réjouisse, qu'on s'en plaigne, là n'est pas la question; il faut tâcher d'ouvrir tout d'abord les yeux, de se rendre compte de la réalité, au lieu de se payer de formules et de phrases toutes faites.

D'abord, la division indiquée repose sur une méconnaissance complète des facultés de l'enfant. La séparation rationnelle devrait être : *Initiation* (de 4 à 11 ans environ); *Étude* (ensuite). L'initiation, préparatoire à l'étude, se présenterait exclusivement sous la forme de jeux, de récréations, ne faisant jamais un appel direct à la mémoire, ni au raisonnement purement logique, ne portant presque que sur des notions concrètes, et se donnant pour but d'éveiller l'esprit de l'enfant, en ne cessant de l'intéresser.

Avec l'enseignement primaire actuel, il faudrait que les cerveaux de tous les instituteurs de France, d'une part, et aussi les cerveaux de tous leurs élèves, fussent coulés dans le même moule.

Du reste, l'organisation est tellement mal appropriée qu'en fait les limites sont franchies de toutes parts. Dès que l'enseignement primaire prend un caractère vraiment sérieux, comme dans certaines grandes villes, et à Paris, par exemple, son premier cadre ne lui suffit plus; il y a toute une population scolaire dont les besoins intellectuels ne sont pas satisfaits par le programme primitif. Il a fallu créer dès lors une branche nouvelle, l'enseignement primaire supérieur, et des établissements spéciaux où cet enseignement est distribué. Donc empiétement du primaire sur le secondaire.

Ce dernier, de son côté, reçoit de tout jeunes enfants (certains parents les lui enverraient en nourrice); il ne veut pas

les refuser, et à leur intention il a institué des classes primaires: voilà une deuxième violation de frontières.

Maintenant, il faut bien se mettre une chose dans la tête : c'est que pour 999 élèves sur 1000, l'instruction est un moyen, non un but, et que le but, c'est d'arriver à une profession. De là d'innombrables branches d'enseignement professionnel, se rattachant soit à l'enseignement primaire, soit à l'enseignement secondaire; parmi ces professions, il y a notamment celles qui ont justement pour objet le recrutement des éducateurs; de là les écoles normales de toutes sortes s'appliquant aux deux sexes, et venant intéresser à la fois les trois ordres d'enseignement, sans parler des innombrables brevets et diplômes qu'il faudrait un volume pour énumérer.

Les professions techniques exigent la création d'écoles spéciales. Elles se sont multipliées beaucoup au cours du XIX^e^ siècle et se recrutent par des concours. Dans quelle catégorie faire rentrer, par exemple, la préparation aux écoles d'arts et métiers? Il est à peu près admis qu'on la classe dans l'enseignement primaire supérieur; théoriquement, hiérarchiquement, c'est donc une marche de l'escalier social moins élevée que l'enseignement secondaire. Et pourtant, s'il y a une différence appréciable entre un candidat à une école d'arts et métiers et un bachelier, c'est qu'en général le premier est plus instruit que le second, sur des sujets sensiblement comparables.

Je viens de parler de bacheliers; on pourrait me demander à quelle catégorie je fais allusion, car nous avons eu et nous avons encore des baccalauréats de bien des espèces. On prend des enfants encore jeunes, on destine les uns aux lettres, d'autres aux sciences; il y a d'innombrables *cycles* conduisant à autant de baccalauréats. Puis vient la préparation aux « grandes Écoles »; ceux qui ont échoué se rejettent souvent sur d'autres écoles, — moins grandes, sans doute.

Bref, les nécessités de la lutte pour l'existence, le besoin de se spécialiser outre mesure et avant l'heure, la tendance à centraliser, uniformiser et réglementer, ont engendré un état de choses qui est le renversement complet de la hiérarchie des trois ordres d'enseignement, dont il ne reste rien, que le titre.

Le malheur ne serait pas grand, si tout cela n'avait produit en même temps un désordre intellectuel lamentable, une absence de vues philosophiques, et finalement une incroyable faiblesse dans les résultats de l'enseignement mathématique; on en demeure convaincu, lorsque l'on essaie de mettre en parallèle les résultats.

Que de chemin parcouru depuis l'*Essai d'Éducation nationale* de La Chalotais, depuis Condorcet, depuis Lakanal, mais à reculons! Et cependant, ce n'est pas la Science qui est en arrière; ses conquêtes, au contraire, apparaissent à tous les yeux et sont universellement proclamées: ce n'est pas non plus l'intelligence moyenne de l'enfance et de la jeunesse qui aurait subi un amoindrissement. Avec des matériaux de premier ordre, avec des élèves bien doués, des professeurs dévoués et instruits, on n'a pu arriver au but, parce qu'on a constamment méconnu les nécessités philosophiques de la Science en même temps que les conditions de la culture scientifique.

La Mathématique est une. Depuis ses premiers éléments jusqu'à ses plus hautes théories, c'est une science qui se développe harmonieusement. Au lieu de multiplier les compartiments dans lesquels on la distribue par petites tranches soigneusement séparées, il serait besoin au contraire de conserver surtout à l'enseignement mathématique son grand caractère d'unité, accompagné d'une extrême diversité dans les moyens.

Il est juste de reconnaître que le nombre sera petit de ceux qui pourront jusqu'aux sommets accomplir le voyage. La plupart devront rester en route à un instant donné. Le problème, dès lors, doit se poser de la façon suivante, soit au point de vue scientifique, soit au point de vue social :

Lorsque l'enfant abandonne à un instant quelconque le cours de ses études mathématiques, pour rentrer dans la vie commune, il faut que l'ensemble des connaissances acquises représente pour lui une valeur utilisable.

Dès lors, il n'y a pas lieu à la multiplicité des programmes au milieu desquels les professeurs eux-mêmes n'arrivent pas à se reconnaître. Un plan d'études, s'échelonnant sur le

nombre d'années que l'on voudra, peut offrir à grands traits le tableau d'un développement mathématique rationnel.

La Mathématique ne comporte pas, dans ses éléments, des procédés pédagogiques différents les uns des autres, dès lors qu'il s'agit de la période « étude ». Qu'un jeune homme soit destiné à devenir membre de l'Institut, commerçant ou industriel, il lui faut toujours débuter par les premiers éléments de la science des nombres et de la science de l'étendue; ces éléments doivent être distribués à tous, suivant le même esprit; je ne dis pas d'une manière identique, croyant surtout, pour les détails de l'enseignement, à l'efficacité de l'initiative qu'y apporte le professeur. Le programme, d'année en année, ne devrait être autre chose qu'un cadre très général, laissant une grande liberté de mouvements. On indiquerait seulement, avec insistance, la nécessité de compléter toujours l'enseignement théorique par des applications portant sur des questions relevant des faits réels; ces applications doivent être bien choisies et convenablement variées, plutôt que multipliées à l'infini. Elles contribuent à l'éducation philosophique, au perfectionnement intellectuel, et en même temps elles sont d'une utilité directe pour ceux qui ne pourront poursuivre ultérieurement leurs études.

Cela n'exclut en aucune façon l'enseignement professionnel spécial pour telle ou telle carrière, lequel présente une haute utilité; mais chacun de ces enseignements aurait alors une base solide, au lieu de se voir contraint de tout recommencer. Imaginons, par exemple, un enfant qui a seulement séjourné jusqu'à 13 ou 14 ans dans les écoles primaires, ou dans tout autre établissement d'instruction; en dehors du premier apprentissage de début, en supposant qu'il ait entrepris à 11 ans ses études, cela représente deux ou trois années, au cours desquelles il aura pu acquérir des notions d'Arithmétique et quelques menues connaissances de Géométrie et d'Algèbre élémentaire, complétées par quelques applications. Pour un motif quelconque, on décide que l'enfant se dirigera vers la carrière commerciale, et pour l'y préparer, on lui fait passer encore une, deux ou trois années dans une école de commerce, exclusivement professionnelle. Cette école, en le recevant, sait sur qui elle peut compter;

elle n'aura pas à reprendre les éléments qu'il possède déjà, mais simplement à les appliquer, en vue de la carrière future ; peut-être, tout au plus, à les compléter sur quelques points particuliers.

Plus tard, cet enfant, arrivé à l'âge d'homme et lancé dans une vie fort étrangère à la culture des sciences, aura le sentiment très exact de l'utilité retirée par lui de l'instruction antérieurement reçue. En outre, si peu étendue qu'ait pu être cette instruction, elle lui aura laissé, sur les points qu'elle a embrassés, des idées claires et justes. Il ne proclamera pas, celui-là, tous les sophismes en cours. Et j'en pourrais dire autant de toutes les professions ; je pourrais le dire, à bien plus forte raison, de celles pour lesquelles la spécialisation n'est obligée qu'à une époque plus tardive ; car les jeunes gens qui s'y adonnent ont alors un nombre assez considérable d'années à leur disposition, pour le développement général de leur intelligence.

Il ne s'agit pas, ce serait folie, de faire une nation de mathématiciens, mais de préparer des esprits qui ne soient pas farcis de préjugés et d'idées fausses sur un des points essentiels intéressant le développement de l'intelligence humaine. Dans ce qu'on appelle les carrières libérales, en particulier, c'est une véritable honte pour un pays que de voir, je ne dis pas l'ignorance (tout le monde est ignorant), mais l'inconscience mathématique qui règne d'une façon si fréquente.

J'ai dit que les vices de l'enseignement mathématique ne tenaient pas au défaut de progrès de la Science ; je pourrais aller plus loin. Ces progrès mêmes ont contribué à engendrer la confusion et le désordre qu'on peut constater, non seulement dans notre pays, mais un peu partout.

Pour me faire comprendre sur ce point, je ne crois pas inutile de reproduire quelques passages d'un article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* [1], il y a quelques années, en collaboration avec mon ami M. Émile Lemoine.

---

[1] *Sur l'orientation actuelle de la Science et de l'enseignement mathématiques ;* numéro du 30 novembre 1893.

« Le XIX^e^ siècle a été marqué par un prodigieux entassement de découvertes mathématiques. Les efforts antérieurs, les grandes méthodes dues aux géomètres précédents venaient d'ouvrir des voies nouvelles. D'autre part, la culture des sciences mathématiques, au lieu d'être le privilège de quelques-uns, tendait à se généraliser: en même temps que le nombre des mathématiciens, celui des recueils périodiques s'accroissait de plus en plus.

» Il s'en est suivi tout naturellement que la quantité des vérités mathématiques en possession desquelles se trouve notre époque est immense, et qu'aucune mémoire humaine ne saurait les posséder toutes... Mais, si l'on y réfléchit, si l'on prend la peine de regarder les choses d'un peu près, on ne tarde pas à reconnaître que les vérités en question sont pour une bonne part des vérités de détail, plutôt curieuses que profitables au développement de l'esprit humain...

» ... Cet état de choses appelle une transformation, une réaction qui devra fatalement s'accomplir, et que beaucoup d'esprits prévoient ou pressentent dès maintenant. Il faudra dresser tant bien que mal l'inventaire des vérités acquises, revenir à la culture des méthodes générales, de préférence aux problèmes particuliers, et, ayant ainsi déblayé le terrain, poursuivre la marche en avant, à la suite de quelque homme de génie qui viendra nous la tracer. »

Ayant fait ressortir les modifications déjà accomplies en matière d'enseignement dans cette direction d'idées, nous ajoutions ensuite :

« Est-ce à dire qu'on en restera là ? Nous ne le croyons en aucune manière, et nous pensons qu'il y a beaucoup de réformes à opérer, qui s'accompliront tout naturellement par la force des choses et sous l'empire de la nécessité. »

Ces réformes, il me semble de plus en plus qu'elles s'imposent, à mesure que nous avançons, et qu'il faudra les introduire dans l'enseignement, indépendamment de la grande refonte scientifique qui peut se faire plus ou moins longtemps attendre. On comprend, en effet, que la multitude des propositions partielles dont il vient d'être question a pénétré en partie dans l'enseignement, même dans l'ensei-

gnement élémentaire ; sous cette influence, la simplicité et l'unité primitives ont subi une altération profonde ; au lieu d'une promenade dans un parc aux allées bien tracées, il s'agit maintenant d'une marche difficile dans un terrain où les accidents se présentent à chaque pas, où les sentiers s'interrompent, s'entrecroisent ou se rejoignent comme au hasard, où des broussailles nous masquent à chaque instant la route à suivre. C'est ce débroussaillement, ce déblaiement qui doit être surtout la grande œuvre actuelle. Lorsqu'il aura été opéré, lorsque les éléments d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie auront été dégagés de la foule des propositions parasites et réduits à l'exposition des idées directrices et des méthodes essentielles, on aura gagné un temps précieux, et du même coup on aura ainsi rendu plus nettes les notions jetées dans les cerveaux. Cela permettra, sans plus de surcharge, d'introduire dans cet enseignement quelques connaissances sur la Géométrie analytique et le Calcul infinitésimal.

Tout cet ensemble, combiné en vue du perfectionnement intellectuel, éclairé par de judicieuses applications, ne dépasse en aucune façon la portée de l'intelligence moyenne, et représente la substance de ce que tout homme d'une instruction ordinaire doit connaître en Mathématique.

En l'échelonnant sur le nombre d'années qu'on jugerait convenable, il ne serait pas difficile d'amener les jeunes gens à en avoir la possession complète à l'âge où d'ordinaire ils viennent demander au baccalauréat la sanction de leurs études.

Sur ces bases, et laissant l'initiation de côté, on voit que l'enseignement mathématique, donné dans des écoles, dans des collèges ou lycées, dans des établissements libres, ou ailleurs, ne comprendrait qu'une seule catégorie : l'enseignement classique, si l'on tient absolument à lui accoler une épithète.

Parmi ceux qui l'auraient reçu, et à des degrés divers d'avancement, les enseignements professionnels de toute nature viendraient se recruter. Dirigés en vue des applications de la Science, ils seraient aussi nombreux que le comporteraient les besoins auxquels ils répondent.

Enfin, comme couronnement de l'enseignement ordinaire, subsisterait l'enseignement supérieur actuel sous un titre ou sous un autre. En France, c'est sur ce point qu'il y a le moins de critiques à faire ; et les imperfections qui subsistent tiennent peut-être à des causes trop étrangères à la Science pour que d'ici bien longtemps nous puissions espérer y voir porter remède. Ces imperfections peuvent se résumer d'un mot : excès de centralisation.

L'enseignement supérieur en France, actuellement et depuis bien des années, est distribué par des hommes d'une haute culture intellectuelle, dont quelques-uns sont des illustrations scientifiques. Le mérite de leurs travaux et l'excellence moyenne de leurs leçons sont au-dessus de tout éloge. Malgré cela, quand on parle de l'enseignement supérieur en France, l'esprit se porte immédiatement sur Paris d'une façon exclusive. C'est à ce point que les facultés des départements, qui en ont pourtant le droit en théorie, en sont venues à ne plus recevoir de docteurs ès sciences mathématiques ; on donne immédiatement le conseil de s'adresser à Paris, à tout candidat qui se présente avec des projets de thèse. Il est résulté de cet état de choses qu'un jeune savant envoyé dans une faculté de province n'a le plus souvent qu'un souci : arriver à Paris pour y poursuivre sa carrière. S'il y réussit, la faculté qu'il quitte y perd un homme de valeur. S'il croit devoir y renoncer, il organisera son existence de manière à ne plus quitter la faculté à laquelle il appartient ; mais, en présence du petit nombre d'auditeurs, de l'obscurité relative de son enseignement, il cessera parfois de poursuivre des recherches purement scientifiques, se fera une philosophie résignée et quelque peu découragée, donnera toujours un bon enseignement, copie fidèle de celui de l'année précédente, mais sans flamme et sans entrain.

Il n'est pas rare, dans les Universités étrangères, de rencontrer des jeunes gens qui parcourent l'Europe entière, passant quelques mois dans une ville, puis dans une autre, pour y suivre les cours d'un professeur en renom sur une partie déterminée de la Science. Ils passeront un trimestre à Leipzig, un autre à Göttingen, se dirigeront ensuite vers Moscou ou vers Bologne, le tout pour devenir plus instruits dans leur science de prédilection. Même chez nous, combien

n'avons-nous pas vu jadis, à la Sorbonne ou au Collège de France, de ces jeunes étrangers devenus nos hôtes, uniquement dans le but d'entendre les leçons de Cauchy, de Liouville ou d'Hermite? A l'heure actuelle, j'en sais qui ont traversé l'Europe pour suivre un cours de M. Poincaré ou de M. Picard. Mais en a-t-on jamais rencontré, dont le but ait été d'aller chercher des éléments d'instruction dans un cours fait à Bordeaux, à Caen ou à Toulouse? La France scientifique, la France mathématique, pour eux, c'est Paris, rien que Paris. Pour nous aussi, malheureusement; nous avons pléthore au centre, anémie et atrophie aux extrémités; la vie scientifique ne circule plus; et cependant, que d'éléments merveilleux, que de richesses intellectuelles sont de la sorte inutilisées, enfouies presque, dans la plupart de nos facultés des Sciences!

Il est à noter, non sans regrets, que les jeunes gens qui viennent résider successivement, pour s'instruire, dans de nombreuses Universités des divers pays, se rencontrent en Russie, en Allemagne, en Italie, un peu partout, excepté en France. Nous restons chez nous; ceux de nos compatriotes qui ne sont pas obligés matériellement à exercer une profession ne mettent pas leur ambition à acquérir des connaissances scientifiques supérieures. Il suit de là que, même en France, les auditeurs de nos facultés des Sciences, dans une proportion considérable, et même presque exclusivement, sont des candidats aux fonctions de professeur. Et le corps enseignant paraît ainsi n'avoir d'autre utilité que de s'alimenter lui-même, au lieu de faire profiter l'ensemble du pays de la Science qu'il distribue libéralement. Il faudrait, pour modifier une telle situation, que la valeur scientifique fût reconnue comme présentant une utilité effective; ce serait une transformation totale des habitudes et des opinions. Les siècles l'opéreront peut-être, mais nous ne pouvons ici que constater le mal, sans indiquer aucun remède. Nulle organisation ne peut opérer à bref délai une refonte de la matière cérébrale de tout un peuple.

Tout jeune Français qui a terminé ce qu'on appelle actuellement « ses études », en justifie en se faisant délivrer ce diplôme de baccalauréat sans lequel un nombre énorme de

carrières restent fermées devant lui. Que le baccalauréat soit d'une espèce ou d'une autre, il renferme toujours dans ses programmes quelques articles plus ou moins étendus se rapportant aux connaissances mathématiques. Le diplôme constitue, en résumé, une sorte de certificat d'ensemble, et tout le monde sait qu'il n'a aucune signification bien précise.

L'institution du baccalauréat a été très discutée depuis longtemps. En 1897, M. H. Vuibert (*Annuaire de la Jeunesse*) en faisait la critique dans une Étude fort remarquable ; les choses n'ont guère changé depuis. Le baccalauréat sert de moyen d'élimination contre le flot envahissant des candidats aux fonctions publiques. Mais, en dehors de cette valeur indirecte, il semble, en principe, correspondre assez bien à notre enseignement secondaire actuel. Autrement dit, son inutilité est complète.

Avec un enseignement rationnel il n'en serait plus besoin. D'année en année, par l'appréciation générale des progrès accomplis, complétée au moyen de quelques épreuves, il serait facile de se rendre compte de la valeur de l'élève; on saurait s'il y a lieu de le laisser poursuivre, ou bien s'il est préférable de lui faire recommencer l'année d'études dont il n'a pas su profiter. La suite des certificats dont il s'agit composerait un véritable baccalauréat fractionné en six, sept ou huit morceaux, mais qui aurait une signification bien nette. Et le jeune homme ayant arrêté son instruction classique générale, à un instant quelconque, serait à même de faire la preuve, par les certificats obtenus, des connaissances acquises par lui. C'est nécessairement une organisation de ce genre qui prévaudra un jour, mais seulement après une refonte d'ensemble, et lorsqu'on aura pour but de former des hommes, plutôt que de préparer des bacheliers.

Les deux autres grades universitaires sont ceux de licencié et de docteur. La licence a été l'objet, il y a quelques années, d'une réforme partielle qui a donné de bons résultats et qui en soi me semble tout à fait raisonnable; elle correspond un peu aux idées exprimées tout à l'heure. On a institué une suite de certificats portant sur les diverses branches de la Science. Quant au doctorat, il n'y a guère d'observations à

faire à ce sujet dans des considérations générales comme celles que nous reproduisons ici. Ce n'est pas un examen, mais une constatation de recherches personnelles et de travaux présentant un caractère d'originalité

En principe tout au moins, celui à qui est décerné le grade de docteur a dû, dans une mesure petite ou grande, apporter sa contribution à l'avancement de la Science. Par sa nature même, ce grade ne saurait être prodigué, bien que, parmi les membres de l'enseignement surtout, le nombre des docteurs se soit sensiblement accru dans ces dernières années. Les facilités de publication, de plus en plus grandes, ont contribué à cette augmentation, dont on ne peut que se réjouir ; elle prouve, en effet, que l'amour de la Science et l'ardeur au travail n'ont pas faibli dans notre corps enseignant, et qu'en cette matière comme en bien d'autres les individus sont de beaucoup supérieurs aux institutions.

J'ai indiqué plus haut les nombreuses branches de l'enseignement professionnel, représentées par une foules d'écoles, depuis les arts et métiers jusqu'à l'École Polytechnique et les écoles d'application, depuis les écoles d'instituteurs primaires jusqu'à l'École Normale supérieure. Tous ces établissements se recrutent en général par des concours auxquels il convient d'ajouter les concours d'agrégation essentiellement professionnels par nature et s'appliquant aux professeurs de l'Université.

Il y avait aussi les concours généraux, institution établie en vue du *prix d'honneur*. Ils ont disparu. Evitons d'en faire l'éloge funèbre.

Pour les divers concours dont je viens de parler, de même que pour les baccalauréats ou la licence, on fait subir aux candidats des examens, composés en général d'épreuves écrites et d'épreuves orales, avec quelques épreuves supplémentaires dans certains cas particuliers.

S'il s'agit d'un grade, les candidats qui font preuve, à ces examens, de connaissances suffisantes, sont admis et reçoivent leur diplôme. S'il s'agit d'un concours proprement dit, on admet dans la limite fixée, non pas tous ceux qui ont fait preuve de capacité, mais les premiers d'entre eux, c'est-à-dire ceux qui ont montré plus de savoir que leurs concurrents.

On a souvent élevé des critiques contre cette organisation, et la question est assez importante, en matière mathématique, pour mériter qu'on s'y arrête un peu.

Une observation préliminaire me semble s'imposer. Je devine bien, à peu près, comment, pour les examens purs et simples, pour les grades universitaires par exemple, on pourrait arriver à tourner la question. Mais, pour les concours, elle me semble se poser d'une façon impérieuse et nette. Prenons l'une quelconque des grandes Écoles : École Normale Supérieure, École Centrale, École Polytechnique, par exemple. Il y a 200 places disponibles ; 1 000 candidats viennent se présenter ; il faut bien trouver un moyen de sélection, on est obligé de laisser 800 postulants à la porte. Va-t-on recourir à un tirage au sort ? Va-t-on essayer une constatation de capacité suffisante, et faire intervenir ensuite le sort, parmi les bons candidats ainsi désignés, pour décider de l'admission ? Va-t-on faire une enquête personnelle sur chacun d'eux, et se prononcer d'après les renseignements obtenus ? Le service public, intéressé à avoir non pas seulement les bons mais *les meilleurs*, ne se contenterait probablement pas d'un de ces expédients. Et parmi les personnes qui critiquent le plus vivement et le plus amèrement l'institution des concours, je crois fort qu'il s'élèverait une véritable clameur, si l'on remplaçait ce régime par celui du hasard ou du bon plaisir.

Les concours assurément ne sont pas une institution parfaite, pas plus qu'aucune autre des institutions humaines ; mais s'ils sont un mal, c'est un mal nécessaire, et moins redoutable que tout ce qu'on pourrait essayer de mettre à la place. Ramené à ces termes, le problème consiste à chercher la méthode de nature à assurer les choix les plus judicieux, et à éliminer le plus possible l'influence des erreurs d'appréciation et du hasard.

Parmi les auteurs qui ont critiqué avec le plus de force le système des examens en matière mathématique, il faut citer Lacroix, dans ses *Essais sur l'enseignement,* dont j'ai parlé plus haut. C'est surtout aux examens oraux qu'il adresse ses reproches. Ceux-ci portent sur l'abus du rôle de la mémoire, sur la préparation artificielle résultant des objections prévues que feront les examinateurs, sur la facilité avec laquelle

s'envolent de l'esprit les notions acquises dans de pareilles conditions, sur l'influence néfaste de la timidité ; enfin sur l'inégalité que les examens successifs présentent entre eux.

Pour remédier à ces inconvénients, Lacroix préconise les examens écrits, et propose, pour les épreuves orales, une modification qui consiste surtout en ceci : demander au candidat dans quel auteur il a appris telle branche de la science, sur laquelle il peut être interrogé ; lui présenter l'ouvrage en question, et l'inviter à en expliquer tel ou tel chapitre, en accompagnant l'explication de commentaires et de réponses à des observations. Des considérations, d'ailleurs intéressantes et justes, sur l'enseignement lui-même montrent que dans toute cette discussion Lacroix vise les examens proprement dits plutôt que les concours, et qu'il n'a pas, conséquemment, serré de près la question difficile soulevée par lui.

La modification des examens oraux qui vient d'être indiquée, peut-être à la rigueur applicable en 1828, serait impossible aujourd'hui dans la pratique, avec l'abondance des publications classiques qui s'est produite depuis lors ; il faudrait que chaque examinateur traînât derrière lui une bibliothèque ; et, de plus, telle désignation d'un livre par le candidat ne pourrait-elle pas indisposer à elle seule l'esprit de l'examinateur ? D'ailleurs, en fait, nous l'avons dit, on ne se prépare plus aux concours en se servant de livres.

Il y aurait cependant à tirer parti, sinon du procédé lui-même, du moins de l'esprit dans lequel l'a proposé l'homme de très grand mérite que nous venons de citer. Si, par exemple on interrogeait un candidat en lui demandant quelle théorie l'a particulièrement intéressé, en l'invitant à en exposer les principes et les propositions essentielles, on pourrait apprécier autre chose que les résultats passagers d'un effort de mémoire. Malheureusement, l'expérience tentée n'a produit généralement que des résultats négatifs, les candidats ressentant plus de surprise et d'embarras que si on leur avait demandé d'emblée un calcul très compliqué ou une démonstration pénible à retenir. A défaut, j'ai personnellement essayé pendant trois années (1904, 1905, 1906), aux concours de l'Ecole Polytechnique, de donner par écrit à chaque candidat sa première question, en lui laissant 15 à 20 minutes pour y réfléchir et prendre des notes, avant d'être interrogé.

Ce procédé me semble avoir donné de bons résultats, et a été approuvé par tous les professeurs dont j'ai sollicité l'avis sincère.

En somme, le mécanisme général des examens et des concours est moins critiquable que l'enseignement lui-même, et le bouleversement invraisemblable que subissent périodiquement les programmes.

Malgré tout, pourvu que les examinateurs choisis soient des hommes instruits, judicieux et consciencieux, les examens, et même les examens oraux, resteront encore la plus acceptable des méthodes de sélection. Il n'est pas impossible d'égaliser entre eux les divers examens de manière qu'ils présentent des difficultés comparables ; de réduire le rôle de la mémoire en demandant quelques applications simples ; de passer en revue à peu près toutes les matières du programme, de manière à ne pas laisser croire aux candidats qu'on éprouve pour certaines d'entre elles une prédilection exceptionnelle. Il faut aussi se mettre en garde contre ce sentiment, d'ailleurs très humain, qui vous porte à mieux apprécier une méthode ou une démonstration que telle autre démonstration, pour résoudre une question quelconque. Le candidat ne peut exposer que ce qui lui a été enseigné ; et si ce qu'il expose est raisonnable, on doit l'écouter et accepter ses explications, trouvât-on qu'il y a mieux. Quant au rôle de la timidité, sur laquelle on a toujours tant déclamé, il est moins considérable en général qu'on ne se l'imagine ; et il appartient à l'examinateur de le réduire au minimum, par la forme même de ses interrogations ; c'est une affaire de tact et d'observation de soi-même.

Parvenu à la fin de la tâche entreprise, et jetant un coup d'œil sur le chemin parcouru, je sais gré au lecteur qui se sera donné la peine de me suivre jusqu'au bout, et je l'en remercie.

Sous une forme que j'aurais voulu rendre moins imparfaite et moins aride, j'ai tenté de montrer que la Science mathématique mérite l'admiration des hommes non seulement par les services directs qu'elle nous rend, mais par les perfec-

tionnements qu'elle apporte à la culture générale de l'esprit humain, et par les satisfactions intellectuelles qu'elle donne à ses adeptes.

Ceux qui en médisent la connaissent mal ; et ils la connaissent mal parce qu'elle leur a été mal enseignée.

L'éducation mathématique pourrait devenir un des plus puissants instruments de progrès et de civilisation, au prix de quelques réformes faciles.

Si j'ai pu hâter d'un jour l'accomplissement de ces réformes, si j'ai pu montrer à un seul de mes contemporains qu'il y a dans la Mathématique autre chose que des conventions et des formules, et si j'ai décidé celui-là, suivant la belle expression de Rabelais, *à rompre l'os et à sucer la moelle,* j'ai la conscience que ce petit livre n'aura pas été complètement inutile.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE[1].

Ampère. — *Essai sur la philosophie des sciences.* 2 vol. in-8°, 1re édition, 1834-1843; 2e édition, 1857.

J.-F. Bonnel. — *De l'imagination dans les principes des sciences exactes.*

Carnot. — *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.* 1re édition, 1797; 2e édition, 1860.

Aug. Comte. — *Cours de Philosophie positive.* 1re édition, 1839-1842, 6 vol. in-8°; 2e édition (avec préface de Littré), 1864.

Aug. Comte. — *Traité élémentaire de Géométrie analytique.* 1re édition, 1843; nouvelle édition, 1894.

Cournot. — *Sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique.* 2 vol. in-8°, 1851.

Couturat. — *De l'infini mathématique.* In-8°, 1896.

Coyteux. — *Exposé des vrais principes des Mathématiques.* In-8°, 1858.

Dauge. — *Méthodologie mathématique.* Grand in-4°; Gand, 1883. Nouvelle édition, 1896.

Delboeuf. — *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats.* In-8°, Liége. 1868.

Descartes. — *Géométrie.* 1re édition, Leyde, 1637; nouvelle édition, 1886.

Du Bois-Reymond. — *Théorie générale des fonctions.* Traduit de l'allemand par G. Milhaud et A. Girot. In-8°, 1887.

(1) Cette liste est purement indicative; elle ne saurait en aucune façon constituer une bibliographie tant soit peu complète de la philosophie mathématique; mais il nous a paru qu'elle pouvait quand même présenter un certain intérêt pour quelques lecteurs.

DUHAMEL. — *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* 5 vol. in-8°, 1877-1885.

FREYCINET (CH. DE). — *Essai sur la métaphysique du haut calcul.* In-8, 1re édition, 1860; 2e édition, 1881.

FREYCINET (CH. DE). — *Essai sur la philosophie des sciences.* (Analyse, Mécanique). In-8°, 1896.

FOUCHER (l'abbé). — *La géométrie métaphysique.* In-8°, 1758.

JACQUIER. — *De l'esprit des mathématiques supérieures.* In-8°, 1873.

LACROIX. — *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des Mathématiques en particulier.* In-8°, 1828.

LAPLACE. — *Essai philosophique sur le calcul des probabilités.* In-8°, 6e édition, 1840.

LIARD. — *Définitions géométriques et définitions empiriques.* 1re édition, 1873; 2e édition, 1887.

A. PICART. — *Introduction aux principes mathématiques des lois générales du monde physique.* In-8°, 1882.

PRONY. — *Mécanique philosophique.* In-4°, 1800.

TABLE DES NOMS CITÉS.

Abel, 38, 65.
Alembert (d'), 4, 115, 116, 182.
Ampère, 73, 107.
Archimède, 12, 57.
Arnoux (G.), 89.
Babinet, 125.
Bellavitis (G.), 50, 180, 205.
Beltrami, 77.
Bolyaï, 77.
Boole, 51.
Borel, V, VI.
Brocard (H.), 86.
Brocot, 133.
Brodie, 51.
Cantor (G.), V.
Catalan, 36.
Cauchy, 50, 65, 66, 72, 175, 180, 229.
Chasles, 82, 84, 85, 191, 207.
Comte (Aug.), 4, 9, 14, 24, 35, 54, 56, 63, 92, 133.
Condorcet, 2, 4, 223.
Cousinery, 143.
Couturat, VI, VII.
Cramer, 199.
Cremona, 85.
Darboux (G.), 99.
Darwin, 23.
Desargues, 82.
Descartes, 4, 54, 90, 99, 101, 191.
Diderot, 4.
Dulong, 125.
Euclide, 77, 192.
Euler, 38, 199.
Farey, 133.
Fermat, 20, 36, 37, 38, 52, 54, 175.
Fibonacci, 37.
Fuchs, 65.
Galois, 38.
Gauss, 12, 36, 37, 38, 77, 175.
Genaille, 134.
Goldbach, 36.
Grassmann, 50, 101, 205.
Hadamard, V.
Halphen, 65.
Hamilton, 50.
Haton de la Goupillière, 113.
Helmholtz, 77.
Hermite, 38, 229.
Hoüel, 122.
Jacobi, 65, 66.
Kant, 23.
Kepler, 72, 121, 148, 150, 151.
Klein, 65.
Kœnigs, V.
Kronecker, 38.
Kummer, 38.
La Chalotais, 170, 172, 185, 223.
Lacroix, 198, 199, 232, 233.
Lagrange, 12, 54, 55, 56, 60, 64, 72, 115, 126.
Laguerre, 103.
Lakanal, 223.
Lalanne, 145.
Lallemand, 145.
Lamé, 37, 175.
Laplace, 149.
Laurent (H.), 25.
Léauté, 214.
Legendre, 65, 66, 175, 186, 187.
Leibniz, 4, 5, 20, 23, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60.
Lemoine (E.), 86, 87, 225.
Léonard de Pise, 37.
Le Verrier, 149, 150.
Lie (Sophus), V, 65.
Liouville, 175, 229.

Lobatschefsky, 77.
Lucas (E.), 38, 133, 134, 170, 175.
Mannheim, 85, 195.
Marie (M.), 103.
Méray (Ch.), 187.
Mittag-Leffler, 65, 69.
Monge, 142.
Montaigne, 10.
Mouchot, 104.
Napoléon, 23.
Neper, 129.
Neuberg, 86.
Newton, 20, 47, 52, 54, 55, 56, 72, 121, 148, 149, 151, 198, 214.
Ocagne (M. d'), 144, 145.
Painlevé, v, 69.
Pascal, 4, 23, 37, 134.
Peano, 51.
Peirce, vi.
Picard, v, 65, 88, 229.
Platon, 83.
Poincaré, v, 65, 76, 77, 78, 229.
Poncelet, 82, 84, 85, 151.
Pouchet, 145.
Pythagore, 190.
Rabelais, 235.
Reye, 85.
Riemann, 65, 77.
Ripert, 202.
Roberval, 54.
Russell (B.), vi.
Schwarz, 65.
Simart, 88.
Steiner, 87.
Sturm, 182.
Sylvester, 122.
Tarry (G.), 104.
Tchebycheff, 134.
Thomas, 134.
Varignon, 143.
Viète, 46, 47, 52.
Vuibert, 230.
Walras, 132.
Weierstrass, 65, 69.

TABLE DES MATIÈRES.

LA MATHÉMATIQUE.

PHILOSOPHIE. — ENSEIGNEMENT.

Pages.

PRÉFACE V

INTRODUCTION 1

Caractère de cet Ouvrage 1

La Mathématique 2

Philosophie 3

Enseignement 6

Plan général 7

Observation finale 9

LA MATHÉMATIQUE PURE. — PHILOSOPHIE.

CHAPITRE I. — *La Mathématique et ses subdivisions.*

Essais de définitions 11

Origine expérimentale 12

Mesure et nombre 13

La définition d'Auguste Comte 14

Le but de la Mathématique 15

Subdivisions de la Mathématique 19

Essai d'une classification 21

Importance de la science mathématique 22

CHAPITRE II. — *L'Arithmétique et l'Arithmologie.*

Caractère général de l'Arithmétique 24

Le nombre 25

Rapport 26

Numération 26

Opérations élémentaires 27

Divisibilité 28

Les fractions 29

L'infini en Arithmétique 31

Les incommensurables 32

Proportions 34

Système des mesures 34

Calculs arithmétiques d'ordre supérieur 35

Arithmologie 35

CHAPITRE III. — *L'Algèbre.*

Pages.
Les fonctions 39
Langage algébrique 42
Classification des fonctions 43
Équations algébriques 44
Classification des équations 45
Théories algébriques 46
Extension des idées et du langage algébriques 47

CHAPITRE IV. — *Le Calcul infinitésimal.*

Importance historique 52
Analyse transcendante 53
Caractère général du Calcul infinitésimal 54
Divisions du Calcul différentiel 58
Formation des équations différentielles 60
Calcul intégral 61
Intégrales définies 62
Calcul des variations 63

CHAPITRE V. — *La Théorie des fonctions.*

Explication préliminaire 65
Origine de la Théorie des fonctions 65
Classification des fonctions 68
Étude des fonctions 68
L'interpolation 71

CHAPITRE VI. — *La Géométrie.*

Origine des notions géométriques 75
Les axiomes et les diverses géométries 77
Divisions de la Géométrie 78
La Géométrie des anciens 79
La Géométrie moderne 82
Les transformations géométriques 84
La Géométrie projective 85
La Géométrie cinématique 85
La Géométrie du triangle 86
La Géométrographie 87
Les Géométries à *n* dimensions 87
La Géométrie de situation 88

CHAPITRE VII. — *La Géométrie analytique.*

Les coordonnées 90
Équations des lignes; lieux géométriques 92
Transformation des coordonnées; classification des lignes 94
Extension à l'espace 94
Théorie des courbes planes 96

Pages.
Théorie des surfaces 98
Coordonnées trilinéaires et tétraédriques; coordonnées tangentielles.. 100
Le Calcul géométrique 101
L'introduction des imaginaires en Géométries analytique..... 103

Chapitre VIII. — *La Mécanique rationnelle.*

Définition et objet de la Mécanique 105
Introduction du temps; la Cinématique 107
Le point matériel..... 108
L'inertie et les forces 109
La masse..... 110
Les unités en Mécanique..... 111
La Statique..... 112
La Dynamique..... 114
La Dynamique du point matériel..... 114
La Dynamique des systèmes..... 115
Les limites de la Mécanique 116

LA MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE. — PHILOSOPHIE.

Chapitre I. — *Considérations générales*..... 119
Chapitre II. — *L'Application du Calcul*..... 127
Chapitre III. — *L'Application de la Géométrie*..... 135
Chapitre IV. — *L'Application de la Mécanique*..... 147

ENSEIGNEMENT.

Chapitre I. — *Vue générale sur l'enseignement de la Mathématique.* 157
Chapitre II. — *Enseignement de l'Arithmétique*..... 169
Chapitre III. — *Enseignement de l'Algèbre et du haut Calcul*..... 176
Chapitre IV. — *Enseignement de la Géométrie*..... 185
Chapitre V. — *Enseignement de la Géométrie analytique* 198
Chapitre VI. — *Enseignement de la Mécanique*..... 209
Chapitre VII. — *La Hiérarchie des Enseignements* 220
Index bibliographique..... 237
Table des noms cités..... 239

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
38857 Quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE

GAUTHIER-VILLARS

SCIENCES

ASTRONOMIE, MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE, CHIMIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Edition française, publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de Jules Molk, Professeur à l'Université de Nancy, avec le concours de nombreux savants et professeurs français.

L'édition française de l'*Encyclopédie* est publiée en 7 tomes formant chacun 3 ou 4 volumes de 200 à 300 pages grand in-8, qui paraissent en fascicules de 10 feuilles environ.

Le prix de chaque fascicule sera d'environ 5 fr.

TOME I : ALGÈBRE.

Volume I : **Arithmétique.**

Fascicule I : *Principes fondamentaux de l'Arithmétique,* d'après H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk. — *Analyse combinatoire et théorie des déterminants;* exposé, d'après E. Netto, par H. Vogt. — *Nombres irrationnels et limites;* exposé, d'après A. Pringsheim, par J. Molk; 1904 ..... 5 fr.

Volume III : **Théorie des nombres.**

Fascicule I : *Propositions élémentaires de la théorie des nombres*; exposé, d'après P. Bachmann, par Ed. Maillet. — *Théorie arithmétique des formes;* exposé, d'après K. Th. Vahlen, par E. Cahen: 1906 ... 3 fr.

Volume IV : **Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses.**

Fascicule I : *Calcul des probabilités;* exposé, d'après E. Czuber, par J. Le Roux. — *Calcul des différences et interpolation;* exposé, d'après D. Sélivanov et J. Bauschinger, par H. Andoyer; 1906..... 5 fr.

Pour paraître en 1907 :

Tome I. Volume I. Fascicule II. *Algorithmes illimités,* d'après A. Pringsheim, par J. Molk.

Tome I. Volume II. Fascicule I. *Fonctions rationnelles,* d'après E. Netto, par R. Le Vavasseur.

(*Demander le prospectus spécial.*)

FABRE (C.), Docteur ès Sciences, Professeur adjoint à l'Université de Toulouse. — **Traité pratique de Photographie stéréoscopique.** Grand in-8 (25 × 16) de 207 pages, avec 132 figures; 1906..... 6 fr.

FÉRET (R.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Chef du Laboratoire des Ponts et Chaussées à Boulogne-sur-Mer. — **Etude expérimentale du Ciment armé.** Expériences. Théories et calculs. Bibliographie du Ciment armé. Recherches annexes sur les diverses résistances des mortiers et bétons. Grand in-8 de VI-778 pages, avec 197 figures; 1906. 20 fr.

JOUFFRET (G.). — Mélanges de Géométrie à quatre dimensions. Grand in-8 (25 × 16) de XI-227 pages, avec 49 figures; 1906..... 7 fr. 50 c.

LIBRAIRIE
GAUTHIER-VILLARS

SCIENCES

ASTRONOMIE, MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE, CHIMIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1907

DIVISIONS DU CATALOGUE.

	Pages.
Arithmétique, Algèbre, Géométrie	3
Astronomie, Météorologie	28
Calcul différentiel et intégral, Analyse mathématique	17
Chimie	45
Cours de Mathématiques, Collections diverses	11
Géométrie analytique	9
Géométrie descriptive	10
Mécanique rationnelle	25
Ouvrages divers	48
Physique, Électricité, Thermodynamique	36
Publications périodiques	49

ENVOI FRANCO DES CATALOGUES SPÉCIAUX SUIVANTS :

A. — Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie.
B. — Géométrie, Géométrie analytique, Géométrie descriptive.
C. — Calcul différentiel et intégral, Analyse mathématique.
D. — Cours de Mathématiques, Collections diverses, Problèmes.
E. — Mécanique, Sciences de l'Ingénieur.
F. — Astronomie, Météorologie.
G. — Physique, Thermodynamique.
H. — Chimie et applications.
I. — Ponts et Chaussées, Mines, Topographie, Constructions.
J. — Opérations financières, Tables diverses.
K. — Périodiques, Ouvrages divers.
L. — Encyclopédie des Aide-Mémoire.
M. — Encyclopédie des Travaux publics et Encyclopédie industrielle.
N. — Électricité.
O. — Actualités scientifiques.
P. — Photographie.
R. — Collection *Scientia*.

Pour la plupart des Ouvrages nous pouvons envoyer, sur demande, un prospectus détaillé.

Envoi franco, aux prix marqués, dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE.

*ARNOUX (Gabriel), ancien officier de Marine. — **Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. — Arithmétique graphique.** *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques.* Grand in-8 (25 × 16) avec 65 figures; 1906 ..... 7 fr. 50 c.

†BACHET (Claude-Gaspar), Sieur de Méziriac. — **Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.** 4e édition revue et simplifiée. In-16 (19 × 12) de VI-161 pages; 1905..... 3 fr. 50 c.

†BARBARIN (P.), Professeur de Mathématiques supérieures au lycée de Bordeaux. — **Géométrie non Euclidienne.** 2e édition. In-8 écu (20×13) de 80 p., avec 19 figures et 3 planches hors texte, cartonné (*C. S.*); 1907..... 2 fr.

BONNEL (J.-F.). ancien Élève de l'École Normale supérieure, Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur honoraire du Lycée Ampère. — **La Géométrie atomique rationnelle.** In-8 de 100 pages, avec figures; 1902..... 5 fr.

†BURALI-FORTI, Professeur à l'Académie militaire de Turin. — **Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann.** In-8, avec figures; 1897..... 4 fr. 50 c.

†CAHEN (E.), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin. — **Eléments de la théorie des nombres.** *Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* Grand in-8; 1900..... 12 fr.

†CHASLES. — **Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne,** suivi d'un *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie.* 3e édition, conforme à la première. In-4 de 850 pages; 1889..... 30 fr.

†COMBEROUSSE (Ch. de), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. — **Algèbre supérieure,** à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École Centrale. Deux forts volumes in-8. (Ces deux volumes forment les Tomes III et IV du *Cours de Mathématiques.*)

On vend séparément :

I^re^ Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire (Déterminants, fractions continues*, etc.). — *Combinaisons. — Séries. — Étude des fonctions. — Dérivées et différentielles. Premiers principes du Calcul intégral* (XXI-767 pages), avec 20 figures. 3^e^ édition; 1904..... 15 fr.

II^e^ Partie : *Étude des imaginaires. — Théorie générale des équations* (XXIV-832 pages), avec 63 figures. 2^e^ édition; 1890..... 15 fr.

†**DARBOUX (G.)**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures se vendant séparément (Ouvrage complet) :

I^re^ Partie : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887. 15 fr.

II^e^ Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889..... 15 fr.

III^e^ Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Invariants différentiels. Déformation des surfaces;* 1894..... 15 fr.

IV^e^ Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896. 15 fr.

†**DARBOUX (G.).** — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** 2 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément.

Tome I Volume de VI-338 pages; 1898..... 10 fr.

Tome II..... (*En préparation.*)

†**DARBOUX (G.).** — **Etude sur le développement des méthodes géométriques**, lue le 24 décembre 1904, au Congrès des Sciences et des Arts, à Saint-Louis. Brochure in-8 (25×16) de 34 pages; 1905..... 1 fr. 50 c.

†**DOSTOR (G.)**, Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris. — **Eléments de la théorie des déterminants**, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et a la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. In-8 (23×14) de XXXIII-361 pages. 2^e^ édition (nouveau tirage); 1905..... 8 fr.

†**DUPORCQ (Ernest)**, ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes. — **Premiers principes de Géométrie moderne**, *à l'usage des Élèves de mathématiques spéciales et des Candidats à la Licence et à l'Agrégation.* In-8, avec figures; 1899..... 3 fr.

†**FASSBINDER (Ch.)** Professeur du Cours préparatoire à l'Ecole Navale du Collège Stanislas. — **Théorie et pratique des approximatfons numériques.** In-8 (23×14) de VI-91 pages, avec 4 figures; 1906..... 3 fr.

†**FREYCINET (C. de)**, de l'Institut. — **De l'expérience en Géométrie.** Volume in-8 de XX-175 pages; 1903..... 4 fr.

†**GRÉVY (A.)**, Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur au Lycée de Bar-le-Duc. — **Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr.** Algèbre et Géométrie. *Exercices et solutions.* 2^e^ édit. In-8; 1893. 2 fr. 50 c.

†**GUICHARD (C.)**, Correspondant de l'Institut, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand. — **Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux.** In-8 écu (20×13) de 95 pages, avec 4 figures, cartonné; 1905 (*Collection Scientia*)..... 2 fr.

†**GUYOU**, Capitaine de frégate, Examinateur d'admission à l'Ecole Navale. — **Sur les approximations numériques.** 2^e^ édition. In-8; 1891..... 75 c.

†**JOUFFRET (E.)**, ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, membre de la Société mathématique de France. — **Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions.** *Introduction à la Géométrie à n dimensions.* Grand in-8 (25×16), de XXIX-213 pages, avec 65 figures; 1903..... 7 fr. 50 c.

†**JOUFFRET** (E.). — **Mélanges de Géométrie à quatre dimensions.** Grand In-8 (25 × 16) de XI-227 pages, avec 49 figures, 1906..... 7 fr. 50 c.

†**KŒNIGS** (G.), Professeur suppléant au Collège de France. — **La Géométrie réglée et ses applications.** *Coordonnées. Systèmes linéaires. Propriétés infinitésimales du premier ordre.* In-4; 1895..... 5 fr.

†**LACROIX** (S.-F.), Membre de l'Institut. — **Éléments de Géométrie**, suivis de *Notions sur les Courbes usuelles*, 25e édition, conforme aux *Programmes* de l'enseignement dans les Lycées, revue et corrigée par *Prouhet*, Répétiteur à l'École Polytechnique. In-8, avec 220 figures; 1897. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision ministérielle.*)..... 4 fr.

†**LAURENT** (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des Candidats aux Écoles du Gouvernement, revu et mis en harmonie avec les derniers programmes par *J.-H. Marchand*. 5e édition. 4 vol. in-8. 13 fr. 50 c.

On vend séparément :

Ire Partie : **Algèbre élémentaire**, à l'usage des *Classes de Mathématiques élémentaires;* 1897..... 4 fr.

IIe Partie : **Analyse algébrique**, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales;* 1894..... 4 fr.

IIIe Partie : **Théorie des équations**, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales;* 1894..... 4 fr.

IVe Partie : Compléments. — **Théorie des polynomes à plusieurs variables;** 1894..... 1 fr. 50 c.

†**LAURENT** (Hermann), examinateur à l'Ecole Polytechnique. — **Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géométrie.** In-8 écu (20 × 13) de 68 pages, cartonné (*C. S.*); 1902..... 2 fr.

LEMOINE (Emile), ancien Elève de l'Ecole Polytechnique. — **Compléments de Géométrographie.** In-8; 1894..... 50 c.

— **Le Raport anharmonique étudié au point de vue de la géométrografie. Aplication de la géométrografie à la géométrie descriptive.** In-8, avec figures; 1894..... 1 fr. 25 c.

†**LUCAS** (Édouard), Professeur de Mathématiques au Lycée Saint-Louis. — **Théorie des nombres.** *Le calcul des nombres entiers. — Le calcul des nombres rationnels. — La divisibilité arithmétique.* Grand in-8, avec 78 figures; 1891..... 15 fr.

†**LUCAS** (Édouard). — **L'Arithmétique amusante.** Introduction aux Récréations mathématiques. *Amusements scientifiques pour l'enseignement et la pratique du calcul.* Petit in-8, caractères elzévirs, titres en deux couleurs; 1895. 7 fr. 50 c.

†**LUCAS** (Édouard). — **Récréations mathématiques.** 4 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titres en deux couleurs.

Tome I. — *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La Numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.* 2e édit.; 1891. Prix : Hollande..... 12 fr.
Vélin..... 7 fr. 50 c.

Tome II. — *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. Le Casse-Tête. — Les Jeux de demoiselles. — Le jeu icosien d'Hamilton.* 2e édition; 1896. Prix : Hollande..... 12 fr.
Vélin..... 7 fr. 50 c.

Tome III. — *Le Calcul digital. — Machines arithmétiques. — Le caméléon. — Les jonctions de points. — Le Jeu militaire. — La prise de la Bastille. — La patte d'oie. — Le fer à cheval. — Le Jeu américain. — Amusements par les jetons. — L'Etoile nationale. — Rouge et noir;* 1893. Prix : Hollande..... 9 fr. 50 c.
Vélin..... 6 fr. 50 c.

Tome IV et dernier. — *Le Calendrier perpétuel. — L'Arithmétique en boules. — L'Arithmétique en bâtons. — Les Merelles au* XIII^e *siècle. — Les carrés magiques de Fermat. — Les réseaux et les dominos. — Les régions, les quatre couleurs. — La machine à marcher*; 1894.

Prix : Hollande ..... 12 fr.
Vélin ..... 7 fr. 50 c.

MAILLET (**Edmond**), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.** Grand in-8 (25 × 16) de V-275 pages; 1906..... 12 fr.

†**MALEYX** (**L.**). — **Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition.** In-8, avec figures; 1891..... 2 fr. 75 c.

***MANNHEIM** (**le Colonel A.**), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et Développements de la Géométrie cinématique.** *Ouvrage contenant de nombreuses applications à la théorie des surfaces.* In-4, avec 186 figures; 1894..... 25 fr.

MANSION (**P.**), Professeur ordinaire à l'Université de Gand. — **Éléments de la théorie des déterminants** *avec de nombreux Exercices.* 6^e édition revue et augmentée. Grand in-8; 1900..... 3 fr.

†**MARTIN** (**Emile**) et **PERNOT** (**Félix**), anciens élèves de l'École Polytechnique, Professeurs à l'École Sainte-Geneviève. — **Cours de Géométrie descriptive** à l'usage des candidats au Baccalauréat et aux Écoles du Gouvernement : Saint-Cyr, Navale, Centrale, Mines, Normale et Polytechnique.

I^re Partie : Droite et plan. — Sphère. — Trièdres. — Cônes et cylindres. — Surfaces topographiques. Grand in-8 (25 × 16) de 400 pages, avec 394 fig.; 1902..... 10 fr.

II^e Partie : Surfaces de révolution. — Intersection des surfaces. — Surfaces de second ordre. Grand in-8 (25 × 16) de 500 pages, avec 318 figures; 1902. 10 fr.

— **Géométrie cotée**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8 (23 × 14) de V-311 pages, avec 233 figures; 1903..... 5 fr.

†**MEYER** (**Fr.**), Professeur à l'École royale des Mines de Clausthal (Hanovre). — **Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs.** Traduction annotée par H. Fehr, Privat-Docent à l'Université de Genève; avec une Préface de M. d'Ocagne, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. Grand in-8; 1897..... 4 fr.

***MOUCHOT** (**A.**), ancien Professeur de l'Université, Lauréat de l'Académie des Sciences. — **Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure** (**Géométrie de position**). Volume in-8, avec figures; 1892..... 5 fr.

†**NIEWENGLOWSKI** (**B**), Inspecteur général de l'Instruction publique, Docteur ès Sciences, et **GERARD** (**L**), Professeur au Collège Chaptal, Docteur ès Sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement et des candidat à l'Agrégation.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XX-362 pages, avec 289 figures, cartonné à l'anglaise; 1898..... 5 fr.
Broché..... 4 fr.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 496 pages, avec 363 figures, cartonné à l'anglaise; 1899..... 6 fr.
Broché..... 5 fr.

— **Leçons de Géométrie élémentaire** à l'usage des Classes de Première C et D et de Mathématiques A et B (Conformes aux programmes du 27 juillet 1905).

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XX-251 pages, avec 226 figures, cartonné à l'anglaise; 1907 ..... 3 fr. 50 c.
Broché ..... 2 fr. 50 c.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 326 pages, avec 247 figures, cartonné à l'anglaise; 1907 ..... 3 fr. 50 c.
Broché ..... 2 fr. 50 c.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage des Premier et Second cycles, sections A et B.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XVI-163 pages, avec 182 figures, cartonné à l'anglaise; 1903 ..... 3 fr.
Broché; 1903 ..... 2 fr.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 122 pages, avec 96 figures, cartonné à l'anglaise ..... 3 fr.
Broché ..... 2 fr.

†**OCAGNE** (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale.** Grand in-8 de XI-428 pages, avec 340 figures; 1896 ..... 12 fr.

†**PADÉ**, Professeur agrégé de l'Université. — **Premières leçons d'Algèbre élémentaire.** *Nombres positifs et négatifs. Opérations sur les polynomes.* Avec une Préface de M. Jules TANNERY, Sous-Directeur des Etudes scientifiques à l'Ecole Normale supérieure. In-8; 1892 ..... 2 fr. 50 c.

PETERSEN (Julius), Professeur à l'Université de Copenhague, Membre de l'Académie royale des Sciences. — **Théorie des équations algébriques.** Traduit par H. LAURENT, Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique de Paris. In-8; 1897 ..... 10 fr.

PETERSEN (Julius). — **Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques,** *avec application à plus de 400 problèmes.* Traduit par *O. Chemin*, Ingénieur des Ponts et Chaussées. 2e édition. Petit in-8, avec figures; 1892 ..... 4 fr.

†**PIONCHON** (J.), Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut électrotechnique de Grenoble. — **Evaluation numérique des grandeurs géométriques** (Bibliothèque de l'Elève-Ingénieur). In-8 (25 × 16) de 128 pages, avec 54 figures; 1903 ..... 3 fr. 50 c.

†**PIONCHON** (J.). — **Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique** avec un appendice sur les **maxima et minima des figures géométriques.** Grand in-8 (25 × 16) de 146 pages avec 63 figures; 1906. 5 fr.

†**RAFFY**, Maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'Ecole Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse.** *Eléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures: 1897 ..... 7 fr. 50 c.

RIOLLOT (J.), Ingénieur civil des Mines. — **Les carrés magiques.** Grand in-8 (25 × 16) de IV-119 pages avec 311 figures; 1907 ..... 5 fr.

†**ROUCHÉ** (E.) et **DE COMBEROUSSE** (Ch.). — **Traité de Géométrie.** 7e édition, revue et augmentée par EUGÈNE ROUCHÉ. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig. et 1175 *Questions proposées et Problèmes;* 1900 ..... 17 fr.

On vend séparément :

Ire PARTIE : *Géométrie plane* ..... 7 fr. 50 c.
IIe PARTIE : *Géométrie dans l'espace; courbes et surfaces usuelles.* 9 fr. 50 c.

†**ROUCHÉ** (Eugène), Membre de l'Inst tut. Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, et **COMBEROUSSE** (Charles de), Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'Ecole Centrale. — **Eléments de Géométrie**, renfermant un grand nombre d'exercices classés par paragraphes, suivis d'un **Complément à l'usage des Elèves de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales**, et de *Notions sur le lever des plans et le nivellement*. 7e édition conforme aux programmes du 31 mai 1902; revue et complétée par EUGÈNE ROUCHÉ. In-8 de XLI-651 p. avec 485 fig. et 543 questions proposées et exercices; 1904... 6 fr.

†**RUSSELL** (Bertrand A.-W.), M.A. Fellow of Trinity College, Cambridge. — **Essai sur les fondements de la Géométrie.** Traduction par C. CADENAT, Licencié ès Sciences mathématiques, Professeur de Mathématiques au Collège de Saint-Claude, revue et annotée par l'AUTEUR et par LOUIS COUTURAT, chargé de Cours de Philosophie à l'Université de Toulouse. Gr. in-8, avec 11 fig.; 1901. 9 fr.

†**SALMON** (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité d'Algèbre supérieure.** 2e édition française, publiée d'après la 4e édition anglaise, par *O. Chemin*. In-8; 1890..... 10 fr.

†**SAUVAGE** (P.), Professeur de Mathématiques au lycée de Montpellier. — **Les lieux géométriques en Géométrie élémentaire.** In-8, avec fig.; 1893. 3 fr.

†**SCHOENFLIES** (Dr **Arthur**), Professeur à l'Université de Göttingen. — **La Géométrie du mouvement.** *Exposé synthétique*. Traduit de l'allemand par CH. SPECKEL, Capitaine du génie. Edition revue et augmentée par l'auteur, suivie de *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites*, par G. FOURET, Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. In-8, avec 27 figures; 1893..... 6 fr. 50 c.

†**SERRET** (J.-A.). Membre de l'Institut. — **Traité d'Arithmétique.** à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles spéciales. 7e édit., revue et mise en harmonie avec les derniers Programmes officiels, par J.-A. SERRET et par Ch. DE COMBEROUSSE, Professeur au Collège Chaptal. In-8; 1887. (*Autorisé par décision ministérielle.*) Broché..... 4 fr. 50 c.
Cartonné..... 5 fr. 25 c.

†**SERRET** (J.-A.), Membre de l'Institut. — **Cours d'Algèbre supérieure.** 5e édition. 2 forts volumes in-8, avec figures; 1885..... 25 fr.

†**SERRET** (J.-A.). — **Traité de Trigonométrie.** 8e édition. In-8, avec fig.; 1900. (*Autorisé par décision ministérielle*)..... 4 fr.

SICARD (H.), ancien Professeur de Mathématiques au Lycée de Périgueux. — **Traité de Cinématique théorique**, avec des *Notes* par A. LABROUSSE, ancien Elève de l'Ecole Normale supérieure, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.*) Grand in-8 avec nombreuses figures; 1901. 4 fr. 50 c.

†**STIELTJES** (T.-J.), Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Essai sur la Théorie des nombres.** PREMIERS ÉLÉMENTS. *Sur la divisibilité des nombres. Congruences. Équations linéaires indéterminées. Systèmes de congruences linéaires*. In-4; 1895..... 3 fr. 50 c.

†**TANNERY** (Jules), Sous-Directeur de l'Ecole normale supérieure. — **Leçons d'Algèbre et d'Analyse**, *à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales*. Deux volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

TOME I. Volume de VII-423 pages, avec 35 figures et 166 exercices; 1906. 12 fr.

TOME II. Volume de 636 pages avec 104 figures et 238 exercices; 1906. 12 fr.

(Ouvrage conforme au programme du 27 juillet 1904.)

†**TANNERY** (Paul). — **La Géométrie grecque.** *Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*. Grand in-8, avec figures; 1887. 4 fr. 50 c.

†**WEBER** (Henri), Professeur de Mathématiques à l'Université de Strasbourg. — **Traité d'Algèbre supérieure.** *Principes. Racines des équations. Grandeurs algébriques. Théorie de Galois.* Traduit de l'allemand sur la 2e édition, par J. Griess, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur au Lycée Charlemagne. Grand in-8 de XII-762 pages, avec figures; 1898..... 22 fr.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

†**BRISSE** (Ch.). — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique** à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. *Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Centrale de* 1862 à 1891. 2e édition. In-8, avec figures; 1892..... 5 fr.

CARNOY, Professeur à l'Université de Louvain. — **Cours de Géométrie analytique.** 2 volumes grand in-8, avec figures.

On vend séparément :

Géométrie plane, 7e édition; 1904..... 11 fr.
Géométrie de l'espace, 6e édition; 1905..... 11 fr.

†**KŒHLER**, Répétiteur à l'École Polytechnique, ancien Directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure.** *Questions et Solutions,* à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale et à l'Agrégation. 2 volumes in-8, avec figures se vendant séparément :

Ire Partie : *Géométrie plane;* 1886..... 9 fr.
IIe Partie : *Géométrie dans l'espace;* 1888..... 9 fr.

MANDART (H.), Ancien Élève de l'École Normale des Sciences de Gand, Professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Tongres. — **Cours de Géométrie analytique à deux dimensions.** (Sections coniques). Grand in-8 (23 × 15) de VIII-575 pages, avec 166 figures; 1904..... 10 fr.

†**MICHEL** (François), ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'exploitation aux Chemins de fer du Nord. — **Recueil de Problèmes de Géométrie analytique** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. *Solutions des problèmes donnés au Concours de l'École Polytechnique de* 1860 *à* 1900. In-8, avec 70 figures; 1900..... 6 fr.

†**NIEWENGLOWSKI** (B.), Docteur ès Sciences, Inspecteur de l'Académie de Paris, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand. — **Cours de Géométrie analytique,** à l'usage des Élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement. 3 volumes grand in-8, avec nombreuses figures, se vendant séparément.

Tome I : Sections coniques; 1894..... 10 fr.
Tome II : Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques : 1895..... 8 fr.
Tome III : Géométrie dans l'espace (avec une *Note sur les Transformations en Géométrie;* par E. Borel, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille); 1896..... 14 fr.

†**OCAGNE** (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie.** *Théorie des abaques. Applications pratiques.* Grand in-8, avec figures et 1 planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié cuir souple ... 17 fr.

†**OCAGNE** (Maurice d'). — **Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie.** In-4 (28 × 22) de 64 pages avec 31 figures; 1903..... 3 fr. 50 c.

†**OCAGNE** (Maurice d'). — **Coordonnées parallèles et axiales.** *Méthode de transformation géométrique* et *Procédé nouveau de calcul graphique*, déduits de la considération des coordonnées parallèles. In-8, avec figures et 1 planche; 1885..... 3 fr.

†**RÉMOND** (A.), Professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions** avec un *Exposé des méthodes de résolution*, suivis des *Enoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Ecoles Polytechnique, Normale, Centrale, Navale, au Concours général et à l'Agrégation*. 2 volumes in-8, avec figures.

Tome I : *Géométrie à deux dimensions*. 2e édition; 1898..... 7 fr.

Tome II : *Géométrie à trois dimensions. Problèmes généraux. Enoncés*. 2e édition (2e tirage corrigé); 1898..... 7 fr.

***RESAL** (H.), Membre de l'Institut. — **Exposition de la Théorie des surfaces.** In-8, avec figures; 1891..... 4 fr. 50 c.

†**SALMON** (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques)**; traduit de l'anglais par H. Resal et Vaucheret. 3e édition française (conforme à la 2e) publiée d'après la 6e édition anglaise, par Vaucheret, ancien élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8, avec 124 figures; 1897..... 12 fr.

†**SALMON**.— **Traité de Géométrie analytique (Courbes planes)**, destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques*. Traduit de l'anglais sur la 3e édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et augmenté d'une *Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes;* par *G. Halphen*. In-8, avec figures. 2e tirage; 1903..... 12 fr.

†**SALMON**. — **Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.** Traduit de l'anglais sur la 4e édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ire Partie : *Lignes et surfaces du premier et du second ordre*. 2e édition. In-8, avec figures; 1899..... 7 fr.

IIe Partie : *Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces*. 2e édition. In-8, avec figures ; 1903.... 6 fr.

IIIe Partie : *Surfaces dérivées des quadriques. Surfaces du troisième et du quatrième degré. Théorie générale des surfaces*, avec fig.; 1892. 4 fr. 50 c.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

BREITHOF (N.), Professeur à l'Université de Louvain, Inspecteur de l'Enseignement des Arts du dessin, et **BREITHOF** (Franz), Ingénieur civil des Mines, Directeur des travaux graphiques de l'Université de Louvain. — **Traité de Géométrie descriptive.**

Ire Partie : *Point. Droite. Plan*. 4e édition revue et augmentée. In-8 de 193 pages avec Atlas in-4 de 24 planches; 1901..... 11 fr. 50 c.

IIe Partie..... (*En préparation.*)

IIIe Partie : *Projections axonométriques. Projections obliques. Projections centrales. Point. Ligne droite. Plan*, 3e édition. Grand in-8, avec Atlas de même format contenant 29 planches doubles; 1894..... 9 fr.

†**BRISSE** (Ch.), Professeur à l'École Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique — **Cours de Géométrie descriptive.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques élémentaires; 2e édition revue par G. Bouriet, Docteur ès Sciences, Professeur au Lycée Saint-Louis et à l'École des Beaux-Arts, avec 255 figures; 1900..... 5 fr.

IIe Partie, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales; avec 209 figures; 1891 ..... 7 fr.

†**BRISSE** (Ch.). — **Cours de Géométrie descriptive**, à l'usage des candidats à *l'École spéciale militaire*. Grand in-8, avec figures; 1891..... 7 fr.

†**BRISSE** (Ch.). — **Cours de Géométrie descriptive** à l'usage des *Élèves de l'Enseignement secondaire moderne*. 2 vol gr. in-8, avec 370 figures; 1901. 7 fr.

Les Tables détaillées des Matières contenues dans les trois Cours de M. Brisse sont envoyées franco sur demande.

†**CHEVILLARD** (A.), Professeur à l'École des Beaux-Arts. — **Leçons nouvelles de Perspective**. 2e édition. In-8, avec Atlas de 32 planches in-4, gravées sur acier; 1878..... 12 fr.

†**LA GOURNERIE** (de), Membre de l'Institut. — **Traité de Géométrie descriptive**. In-4, publié en *trois Parties*, avec Atlas; 1891-1880-1901..... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément..... 10 fr.

†**LEROY** (C.-F.-A.), ancien Professeur à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure. — **Traité de Géométrie descriptive**, suivi de la *Methode des plans cotés* et de la *Théorie des engrenages cylindriques et coniques*. 14e édition, revue et annotée par *Martelet*, Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures. In-4, avec Atlas de 71 planches; 1896..... 16 fr.

†**MANNHEIM** (A.), Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique**, comprenant les Éléments de la Geometrie cinématique. 2e édition. Grand in-8, avec 256 figures; 1886..... 17 fr.

†**MANNHEIM** (A.). — **Premiers éléments de la Géométrie descriptive**. In-8; 1882..... 1 fr. 25 c.

†**OCAGNE** (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale**. Gr. in-8 de XI-428 pages, avec 340 figures; 1896..... 12 fr.

COURS DE MATHÉMATIQUES.

COLLECTIONS DIVERSES.

BELTRAMI. — **Opere matematiche di Eugenio Beltrami**, pubblicate per cura delle Facoltà di Scienze della R. Università di Roma. Tome I. In-4 de 437 pages avec un portrait de l'Auteur; 1902..... 25 fr.

BRIOSCHI (Francesco). — **Opere matematiche di Francesco Brioschi**, pubblicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli).

Tome I. In-4 de XI-416 pages, avec un portrait de Brioschi; 1901.... 25 fr.
Tome II. In-4 de VIII-456 pages; 1902..... 25 fr.
Tome III. In-4 de X-435 pages; 1904..... 25 fr.
Tome IV. In-4 de IX-418 pages; 1906..... 25 fr.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE publié par une Commission internationale sous la direction de M. le Dr H. Foster Morley. Première année. 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble.. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément.

		fr.			fr.
A.	Mathématiques	18,75	K.	Paléontologie	13,10
B.	Mécanique	13,10	L.	Biologie générale	13,10
C.	Physique	45 »	M.	Botanique	48,75
D.	Chimie	48,75	N.	Zoologie	47 »
E.	Astronomie	26,25	O.	Anatomie humaine	13,10
F.	Météorologie	18,75	P.	Anthropologie physique	13,10
G.	Minéralogie	18,75	Q.	Physiologie	48,75
H.	Géologie	18,75	R.	Bactériologie	26.25
J.	Géographie	18,75			

Deuxième année formant 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble.. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément.

		fr.			fr.
A.	Mathématiques	18,75	K.	Paléontologie	13,10
B.	Mécanique	13,10	L.	Biologie générale	13,10
C.	Physique	30 »	M.	Botanique	46.90
D.	Chimie	46.90	N.	Zoologie	48,75
E.	Astronomie	26,25	O.	Anatomie humaine	18.75
F.	Météorologie	18.75	P.	Anthropologie physique	18,75
G.	Minéralogie	20,65	Q.	Physiologie	48,75
H.	Géologie	20,65	R.	Bactériologie	26.25
J.	Géographie	20.65			

Troisième année, formant 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble.. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément; les prix sont les mêmes que pour la deuxième année.

La quatrième et la cinquième année sont en cours de publication.

Ce Répertoire international est publié au moyen de souscriptions reçues par les Etats du monde entier. Il est dirigé par un Conseil où la France est représentée par M. H. Poincaré. Chaque Volume contient, par ordre alphabétique d'auteurs, puis par ordre méthodique, les titres de tous les Mémoires publiés pendant une année dans les Recueils scientifiques existants.

†**COMBEROUSSE** (Ch. de), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. — **Cours de Mathématiques**, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. 4 volumes in-8, avec figures.

Chaque volume se vend séparément :

Tome Ier : *Arithmétique, Algèbre élémentaire*, avec 38 figures. 4e édition; 1900 ..... 10 fr.

On vend à part : *Arithmétique* ..... 4 fr.
Algèbre élémentaire ..... 6 fr.

Tome II : *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace, Trigonométrie rectiligne et sphérique*, avec 543 figures ..... 13 fr.

On vend à part : *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace.* 4e édition; 1904 ..... 8 fr.

Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie des Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles. 3e édition; 1893 ..... 5 fr.

Tome III : *Algèbre supérieure.* Ire Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire* (*Déterminants, fractions continues*, etc.). — *Combinaisons.* — *Sé-*

ries. — Etude des fonctions. — Dérivées et différentielles. — Premiers principes du Calcul intégral. 3e édition (XXI-767 pages) avec 20 figures; 1904..... 15 fr.

TOME IV : *Algèbre supérieure.* IIe Partie : *Étude des imaginaires. — Théorie générale des équations.* 2e édition (XXXIV-831 pages) avec 63 figures; 1890..... 15 fr.

†**CREMONA et BELTRAMI.** — **Collectanea mathematica,** nunc primum edita cura et studio *L. Cremona* et *E. Beltrami,* in memoriam **Dominici Chelini.** Un beau volume in-8, avec un portrait de Chelini et un fac-similé du testament inédit de Nicolo Tartaglia; 1881..... 25 fr.

†**DUHAMEL.** — **Des méthodes dans les sciences de raisonnement.** 5 volumes in-8..... 27 fr. 50 c.

On vend séparément :

Ire Partie : *Des méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement.* 3e édition. In-8; 1885..... 2 fr. 50 c.

IIe Partie : *Application des méthodes à la science des nombres et à la science de l'étendue.* 3e édition. In-8, avec figures; 1896..... 7 fr. 50 c.

IIIe Partie : *Application de la science des nombres à la science de l'étendue.* 2e édition. In-8, avec figures; 1882..... 7 fr. 50 c.

IVe Partie : *Application des méthodes générales à la science des forces.* 2e édition. In-8, avec figures; 1886..... 7 fr. 50 c.

Ve Partie : *Essai d'une application des méthodes à la science de l'homme moral.* 2e édition. In-8; 1879..... 2 fr. 50 c.

***ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences** de Gottingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Edition française, publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de Jules Molk, Professeur à l'Université de Nancy, avec le concours de nombreux savants et professeurs français.

L'édition française de l'*Encyclopédie* est publiée en 7 tomes formant chacun 3 ou 4 volumes de 200 à 300 pages grand in-8, qui paraissent en fascicules de 10 feuilles environ.

Le prix de chaque fascicule sera d'environ 5 fr.

TOME I : ALGÈBRE.

Volume I : **Arithmétique.**

Fascicule I : *Principes fondamentaux de l'Arithmétique;* exposé, d'après H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk. — *Analyse combinatoire et théorie des déterminants;* expose, d'après E. Netto, par H. Vogt. — *Nombres irrationnels et limites;* exposé, d'après A. Pringsheim, par J. Molk, 1904..... 5 fr.

Volume III : **Théorie des Nombres.**

Fascicule I : *Propositions élémentaires de la théorie des nombres;* exposé, d'après P. Bachmann, par Ed. Maillet. — *Théorie arithmétique des formes;* expose, d'après K. Th. Vahlen, par E. Cahen, 1906..... 3 fr.

Volume IV : **Calcul des probabilités, Théorie des erreurs. Applications diverses.**

Fascicule I : *Calcul des Probabilités;* exposé, d'après E. Czuber, par J. Le Roux. — *Calcul des différences et interpolation;* exposé, d'après D. Sélivanov et J. Bauschinger, par H. Andoyer, 1906..... 5 fr.

(*Demander le prospectus spécial.*)

†**GALOIS (Évariste).** — **Œuvres mathématiques,** publiées sous les auspices de la Société mathématique de France. Avec une introduction par Émile Picard, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec un portrait de Galois; 1897... 3 fr.

†**GRÉVY** (A.). Agrégé des Sciences mathématiques, Professeur au lycée de Bar-le-Duc. — **Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr.** *Algèbre et Géométrie* (Énoncés et Solutions). 2e édition. In-8, avec 30 fig.; 1893..... 2 fr. 50 c.

†**HERMITE** et **STIELTJES.** — **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes,** publiée par les soins de B. Baillaud, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. Bourget, Maître de Conférences à l'Université, Astronome adjoint à l'Observatoire de Toulouse, avec une *Préface* de Emile Picard, Membre de l'Institut. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

Tome I (8 novembre 1882 au 22 juillet 1889), Volume de XX-477 pages avec deux portraits; 1905..... 16 fr.

Tome II (18 octobre 1889 au 15 décembre 1894). Volume de VI-457 pages, avec un portrait et un fac-similé; 1905..... 16 fr.

†**HERMITE.** — **Œuvres de Charles Hermite,** publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Emile Picard, Membre de l'Institut. 3 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905.. 18 fr.

Tomes II et III..... (*Sous presse.*)

HUNTINGTON (**Edward V.**). **La Kontinuo.** *Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj.* Tradukita de la angla lingvo kun la permeso de la autoro de Raoul Bricard. Volume in-16 (19 × 12) de X-125 pages; 1907..... fr.

HUYGENS (**C.**). — **Œuvres complètes de Christiaan Huygens,** publiées par la Société hollandaise des Sciences. In-4.

Tome I : *Correspondance de* 1638 *à* 1656. Lettres nos 1 à 365. — Supplément : 18 lettres. Avec une planche photogravée des portraits de Constantin Huygens et de ses cinq enfants, et figures; 1888.. 35 fr.

Tome II : *Correspondance de* 1657 *à* 1659. Lettres nos 366 à 702. — Supplément : 23 lettres, avec figures, 3 planches et 2 fac-similés de lettres de Huygens; 1889..... 35 fr.

Tome III : *Correspondance de* 1660 *et* 1661. Lettres nos 703 à 947. — Supplément : 24 lettres; avec figures et 9 fac-similés; 1890..... 35 fr.

Tome IV : *Correspondance de* 1662 *et* 1663. Lettres nos 948 à 1197. — Supplément : 5 lettres. Avec figures et 7 planches dont 1 en photocollographie et 1 en photolithographie représentant l'habitation de Constantin Huygens d'après des dessins du temps, et 1 planche fac-similé de bateau en couleur; 1891..... 35 fr.

Tome V. — *Correspondance de* 1664 *à* 1665. Lettres nos 1198 à 1510. — Supplément : 3 lettres. Avec figures et 2 planches; 1893..... 35 fr.

Tome VI : *Correspondance de* 1666 *à* 1669. Lettres nos 1511 à 1791. — Supplément : 20 lettres, avec figures, 16 pl. et 4 fac-similés; 1895.... 35 fr.

Tome VII : *Correspondance de* 1670 *à* 1675. Lettres nos 1792 à 2082. — Supplément : 2 lettres. Avec figures, 1 portrait de l'Auteur, 2 planches et 3 fac-similés; 1897..... 35 fr.

Tome VIII : *Correspondance de* 1676 *à* 1684. Lettres nos 2083 à 2378. — Supplément : 4 lettres. Avec figures, 1 portrait de l'Auteur et 1 planche; 1899..... 35 fr.

Tome IX : *Correspondance de* 1685 *à* 1690. Lettres nos 2379 à 2654. Supplément : 4 lettres. Avec figures, 1 portrait de l'Auteur et 2 planches; 1901. 35 fr.

Tome X : *Correspondance* de 1691 à 1695. Lettres nos 2655 à 2891. Supplément : 10 lettres avec figures; 1905..... 35 fr.

Chaque Tome se termine par les listes suivantes : Liste alphabétique de la Correspondance; Personnes mentionnées dans les lettres; Ouvrages cités; Matières traitées.

INSTITUT DE FRANCE. — Mémoires de l'Académie des Sciences. In-4; 2e Série, Tomes I à XLIX, 1816 à 1906.

Chaque Volume, à l'exception des Tomes ci-après indiqués, se vend séparément..... 15 fr.

Le Tome XXXIII, avec Atlas, se vend séparément..... 25 fr.

Les Tomes VI et XXI ne se vendent pas séparément.

— Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences (*Savants étrangers*), et imprimés par son ordre. In-4, 2e Série; Tomes I à XXXII, 1827-1902.

Chaque Volume, à l'exception des Tomes I à IX, se vend séparément. 15 fr.

— Tables générales des travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences et dans les Mémoires présentés par divers Savants, publiées par les Secrétaires perpétuels. Ces Tables générales comprennent pour chacune des collections (*Mémoires de l'Académie des Sciences* et *Mémoires présentés par divers savants*) les Tables par Volumes, par noms d'auteurs et par ordre de matières. 2 volumes in-4; 1881..... 8 fr. 50 c.

On vend séparément :

Tables générales des travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. 1re Série, Tomes I à XIV (an VI-1815), et 2e Série, Tomes I à XL (1816-1878)..... 6 fr.

Tables générales des travaux contenus dans les Mémoires présentés par divers savants. 1re Série, Tomes I et II (1806-1811), et 2e Série, Tomes I à XXV (1827-1877)..... 2 fr. 50 c.

INSTITUT DE FRANCE (Académie des Sciences). **— Notices nécrologiques lues à l'Académie** (1886-1890). Grand in-8; 1891..... 2 fr. 50 c.

Notice sur J.-C. Bouquet; par M. *G.-H. Halphen.* — Notice sur L.-F.-C. Breguet; par M. *de Jonquières.* — Notice sur L.-R. Tulasne; par M. *Ed. Bornet.* Notice sur E.-N. Laguerre; par M. *Poincaré.* — Notice sur G.-H. Halphen; par M. *E. Picard.* — Notice sur E. Phillips; par M. *H. Léauté.*

†LAISANT (C.-A.), Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès sciences. — La Mathématique. — Philosophie. Enseignement. 2e édition, revue et corrigée. In-8 (23 × 14) de VII-243 pages, avec 5 figures; cartonné. 1907 ..... 5 fr.

†LAGUERRE. — Œuvres de Laguerre publiées, sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Membres de l'Institut, 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Algèbre, Calcul intégral;* 1898..... 15 fr.
Tome II : *Géométrie*; 1905..... 22 fr.

†LAPLACE. — Œuvres complètes. (*Voir* p. 22.)

†MARIE (Maximilien), Répétiteur de Mécanique, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — Histoire des Sciences mathématiques et physiques. 12 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs; 1883-1887..... 72 fr.

Chaque volume se vend séparément..... 6 fr.

†MOIGNO (l'Abbé). — Actualités scientifiques. 130 Volumes in-18 jésus ou petit in-8, se vendant séparément.

Le Catalogue est envoyé franco sur demande.

RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE des Sciences mathématiques, publié par la Commission permanente du Répertoire, paraît successivement par séries de 100 fiches format in-32 ($14^{cm} \times 9^{cm}$), renfermées dans un étui en papier fort. Prix de chaque Série ..... 2 fr.

Les seize premières Séries (fiches 1 à 1600), 1894-1906, sont en vente.

— **INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE des Sciences mathématiques**, publié par la Commission permanente du Répertoire. 2e édition. Grand in-8; 1898 ..... 2 fr.

†**RIEMANN.** — **Œuvres mathématiques de Riemann**, traduites par L. Laugel. Avec une Préface de Ch. Hermite et un Discours de Félix Klein. 1 vol. grand in-8, avec figures; 1898 ..... 14 fr.

†**ROBIN (G.)**, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Œuvres scientifiques de Gustave Robin**, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par Louis Raffy, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. Volumes grand in-8, se vendant séparément :

Mathématiques : *Nouvelle théorie des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* 1 volume grand in-8; 1903 ..... 7 fr.

Physique : 1 volume grand in-8 en 2 fascicules :

Physique mathématique. (Distribution de l'Électricité, Hydrodynamique, Fragments divers.) 1 fascicule grand in-8; 1899 ..... 5 fr.

Thermodynamique générale. (Équilibre et modification de la matière.) 1 fascicule grand in-8 avec 30 figures; 1901 ..... 9 fr.

†**STOFFAES**, Professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures**, à l'usage des Candidats à la Licence ès Sciences physiques. In-8 avec figures, 2e édition entièrement refondue; 1904.. 10 fr.

TRAVAUX ET MÉMOIRES DES FACULTÉS DE LILLE. — Fascicules grand in-8, paraissant à époques irrégulières.

Ce Recueil, fondé en 1889, est publié par fascicules grand in-8 (avec nos d'ordre), qui paraissent à des époques irrégulières. Chaque fascicule ne comprend qu'un seul travail et se vend séparément.

Les fascicules annoncés par la Librairie Gauthier-Villars sont relatifs aux Sciences mathématiques, physiques et chimiques.

Tome I.

N° 1. — **Painlevé (P.)**, *Transformation des fonctions* $V(x, y, z)$; 1889. 1 fr. 75 c.

N° 2. — **Duhem (P.)**, *Des corps diamagnétiques;* 1889..... 3 fr. 50 c.

N° 5. — **Duhem (P.)**, *Sur la continuité de l'état liquide et de l'état gazeux, et sur la théorie générale des vapeurs;* 1891..... 3 fr. 50 c.

Tome III.

N° 11. — **Duhem (P.)**, *Dissolutions et mélanges* (1er Mémoire). *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés;* 1893..... 4 fr. 50 c.

N° 12. — **Duhem (P.)**, *Dissolutions et mélanges* (2e Mémoire). *Les propriétés physiques des dissolutions;* 1893 ..... 4 fr. 50 c.

N° 13. — **Duhem (P.)**, *Dissolutions et mélanges* (3e Mémoire). *Les mélanges doubles;* 1894 ..... 4 fr. 50 c.

Tome IV.

N° 16. — **Brunhes (Bernard)**, *Sur le principe d'Huygens et sur quelques conséquences du théorème de Kirchhoff;* 1895..... 3 fr. 50 c.

TOME X.

N° 28. — **Demartres (G.)**, *Sur certaines familles de courbes orthogonales et isothermes.* Grand in-8, 1901..... 2 fr. 50 c.

NOUVELLE SÉRIE.

N° 1. — **Picart (Luc)**, *Sur quelques points de la théorie de la capture des Comètes;* 1903..... 2 fr.

†**ZEUTHEN (H.-G.)**, Professeur à l'Université de Copenhague. — **Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.** Edition française revue et corrigée par l'Auteur, traduite par JEAN MASCART, Docteur ès Sciences. In-8 de XV-296 pages, avec 31 figures; 1902..... 9 fr.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. ANALYSE MATHÉMATIQUE.

†**ABEL (Niels-Henrik)**. — **Tableau de sa vie et de son action scientifique**, par G.-A. BJERKNES, Professeur à l'Universite de Christiania. Traduction française revue et considérablement augmentée par l'Auteur. Gr. in-8, de IV-368 p. avec un portrait d'Abel; 1885..... 7 fr.

†**ABEL (Niels-Henrik)**. — **Sa vie et son œuvre**; par LUCAS DE PESLOÜAN. In-8 colombier (23 × 15) de XIII-169 pages, avec un portrait; cartonné; 1906. 5 fr.

†**ADHÉMAR (R. d')**. — **Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.** In-8 écu (20 × 13) de 86 pages; 1907. (*C. S.*).. . .. 2 fr.

†**AGRÉGATION (Concours pour l'agrégation de Mathématiques)**. — **Principales formules de la Théorie des fonctions elliptiques.** *Tableau resumé* publié par les « NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES ». Brochure in-8; 1900..... 75 c.

Les candidats à l'agrégation de Mathématiques sont autorisés à se servir de ce Tableau pour les compositions écrites.

†**ANDOYER (H.)**, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — **Leçons sur la Théorie des Formes et la Géométrie analytique supérieure**, *à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* Volume in-8 (25 × 16) de VI-508 p.; 1900..... 15 fr.

†**ANDOYER (H.)**, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — **Leçons élémentaires sur la Théorie des formes et ses applications géométriques** *à l'usage des candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques.* In-4 autographié de VI-184 pages; 1898..... 8 fr.

†**APPELL (Paul)**, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Eléments d'Analyse Mathématique** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens* (Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures). 2e édition. Grand in-8 (25 × 16) de VII-714 pages, avec 229 figures, cartonné à l'anglaise; 1905..... 24 fr.

†**APPELL (Paul)**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et **GOURSAT (Edouard)**, Maître de Conférences à l'Ecole Normale supérieure. — **Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.** *Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*, avec une Préface de CH. HERMITE. Grand in-8, avec 91 fig.; 1895..... 16 fr.

Sc.

†APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et LACOUR (E.), Maître de Conférences à l'Université de Nancy. — **Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications.** Grand in-8, avec figures; 1896..... 12 fr.

†BERTRAND (J.), de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Calcul des probabilités.** 2e édition conforme à la première. Grand in-8 (25 × 16) de LVII-322 pages; 1907..... 12 fr.

†BOREL (Emile). Professeur adjoint de Théorie des fonctions à la Sorbonne. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction de E. BOREL. Volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Exposé de la théorie des ensembles et applications, par E. BOREL; 1898..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par E. BOREL; 1900..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par E. BOREL; 1901..... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par E. BOREL, recueillies et rédigées par ROBERT D'ADHÉMAR; 1902..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par E. BOREL, recueillies et rédigées par LUDOVIC ZORETTI; avec figures; 1903..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE; 1904..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par EMILE BOREL et rédigées par MAURICE FRÉCHET, avec des Notes de PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE. Volume de VIII-160 pages, avec 8 figures; 1905. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, et rédigées par A. DANJOY, Élève de l'École Normale supérieure. Volume de VIII-128 pages; 1905..... 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF. Volume de IV-144 pages, avec figures; 1905.... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE. Volume de VIII-128 pages; 1906..... 3 fr. 50 c.

†BOUCHARLAT (J.-L.). — **Éléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral.** 9e édition, revue et annotée par *H. Laurent*, Répétiteur à l'École Polytechnique. In-8, avec planches; 1891..... 8 fr.

†BOUSSINESQ. — **Cours élémentaire d'Analyse infinitésimale**; à l'usage des personnes qui étudient cette Science *en vue de ses applications mécaniques et physiques*. 2e édition. 2 volumes grand in-8, avec figures.

TOME I. — **Calcul différentiel**; 1887..... 12 fr.
TOME II. — **Calcul intégral**; 1890..... 23 fr. 50 c.

On vend séparément.

TOME I.

Partie élémentaire, à l'usage des Élèves des Écoles industrielles.. 7 fr. 50 c.
Compléments..... 9 fr. 50 c.

TOME II.

Partie élémentaire..... 7 fr. 50 c.
Compléments..... 16 fr.

†BRIOT (Ch.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Théorie des fonctions abéliennes.** Un beau volume in-4; 1879..... 15 fr.

†**CAUCHY** (A.). — **Œuvres complètes d'Augustin Cauchy**, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, avec le concours de *Valson, Collet* et *Borel*, Docteurs ès Sciences. 27 volumes in-4.

LISTE DES VOLUMES.

I^re^ Série. — *Tome I, 1882 : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. — Mémoire sur les intégrales définies.* — Tomes II et III. Mémoires extraits des *Mémoires de l'Académie des Sciences.* — *Tome IV, 1884; *Tome V, 1885; *Tome VI, 1888; *Tome VII, 1891. Tome VIII, 1893; *Tome IX, 1896; *Tome X, 1897; *Tome XI; *Tome XII, avec une Table générale des 12 volumes de la I^re^ Série, 1901 : *Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* — La *Table générale de la I^re^ Série* se vend à part..... 2 fr. 50 c.

II^e^ Série. — *Tome I, 1905 : Mémoires extraits du *Journal de l'Ecole Polytechnique.* — Tome II. Mémoires extraits de divers Recueils : *Journal de Liouville, Bulletin de Férussac, Bulletin de la Société philomathique, Annales de Gergonne, Correspondance de l'École Polytechnique.* — *Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'Ecole royale Polytechnique;* *Tome IV : *Résumé des Leçons données à l'Ecole Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différentiel.* *Tome V, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie;* *Tome VI, 1887; *Tome VII, 1889; *Tome VIII, 1890; *Tome IX, 1891 : *Anciens Exercices de Mathématiques* (1^re^, 2^e^, 3^e^, 4^e^ et 5^e^ années); *Tome X, 1895 : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux Exercices de Prague.* — Tomes XI à XIV. *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique.* — Tome XV. *Mémoires séparés. Tables générales.*

Les volumes parus sont indiqués par un astérisque.

Prix de chaque volume..... 25 fr.

SOUSCRIPTION.

I^re^ Série. — Tome II. *Mémoires extraits des Mémoires de l'Académie des Sciences.* Ce volume, qui paraîtra en 1907, est mis en souscription. Le prix en est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versement à l'avance, à ... 20 fr.

Les anciens souscripteurs qui désirent continuer leur souscription sans avoir à se préoccuper des dates d'apparition des diverses parties de la Collection n'auront qu'à envoyer, lorsqu'ils recevront un Volume, la somme de 20 fr. pour leur souscription au Volume suivant; et celui-ci leur sera expédié *franco* dès son apparition.

Nota. — Les volumes ne sont pas publiés d'après leur classement numérique; on suivra l'ordre qui intéressera le plus les souscripteurs.

Le prospectus général des Œuvres de Cauchy *est envoyé sur demande.*

***CAUCHY** (le Baron Aug.), Membre de l'Académie des Sciences. — **Sa vie et ses travaux**, par C.-A. Valson, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, avec une Préface par Hermite, membre de l'Académie des Sciences. 2 vol. in-8; 1868..... 8 fr.

COMBEBIAC (Gaston). — **Calcul des triquaternions.** *Nouvelle analyse géométrique.* In-4 de 122 pages; 1902..... 5 fr.

†**CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS** (Exposition universelle de 1900). — **Rapports présentés au Congrès international des Mathématiciens**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par E. Duporcq, Secrétaire général. Grand in-8; 1902..... 16 fr.

†**DARBOUX** (G.). — **Sur le problème de Pfaff.** Grand in-8; 1882... 2 fr.

†**DOSTOR** (G.), Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris. — **Éléments de la théorie des déterminants**, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. 2^e^ édition (nouveau tirage). In-8 de XXXII-352 pages; 1905..... 8 fr.

†**DUHAMEL**, Membre de l'Institut. — **Éléments de Calcul infinitésimal.** 4e édition, revue et annotée par *J. Bertrand*, Membre de l'Institut. 2 vol. in-8; 1886-1887 ..... 15 fr.

ESTANAVE (E.), Docteur ès Sciences. — **Revue décennale des Thèses** *présentées à la Faculté des Sciences de Paris en vue du grade de Docteur ès Sciences, du 1er janvier 1891 au 31 décembre 1900*, avec l'indication des périodiques contenant la plupart de ces Mémoires et leurs analyses. In-8; 1901... 5 fr.

†**ESTANAVE.** — **Nomenclature des Thèses de Sciences mathématiques** *soutenues en France dans le courant du XIXe siècle devant les Facultés des Sciences de Paris et des départements.* Grand in-8; 1903..... 2 fr.

†**FAURE** (H.), Chef d'escadron d'Artillerie. — **Théorie des indices.** In-8; 1878 ..... 5 fr.

†**FERMAT.** — **Œuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry*, sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. In-4.

TOME I : *Œuvres mathématiques. — Observations sur Diophante.* — Avec 3 planches en héliogravure (Portrait de Fermat, fac-similé du titre de l'édition de 1679, et fac-simile d'une page de son écriture); 1891. 22 fr.

TOME II : *Correspondance de Fermat;* 1894..... 22 fr.

Ce volume contient la Correspondance de Fermat avec Mersenne, Roberval, Pascal, Descartes, Huygens, etc.

TOME III : *Traductions par* M. PAUL TANNERY *des écrits latins de Fermat, de l'* « Inventum novum » *de Jacques de Billy, du* « Commercium Epistolicum » *de Wallis;* 1896..... 28 fr.

FOUËT (Édouard A.), Professeur à l'Institut Catholique. — **Leçons élémentaires sur la Théorie des fonctions analytiques.** 2 volumes grand in-8 (25×16) se vendant séparément.

Ire PARTIE. *Les fonctions analytiques en général : leurs modes de définition et de représentation.* 2e édition..... (*sous presse*).

IIe PARTIE. *Théorèmes d'existence. Les fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann.* Vol. de 300 p.; 1904. 10 fr.

***FREYCINET** (Ch. de), de l'Institut. — **Essai sur la Philosophie des Sciences.** *Analyse. Mécanique.* 2e édition. In-8; 1900..... 6 fr.

†**FREYCINET** (Charles de). — **De l'Analyse infinitésimale; étude sur la métaphysique du haut calcul.** 2e édition, revue et corrigée par l'Auteur. In-8, avec figures; 1881..... 6 fr.

†**GALOIS** (Evariste). — **Œuvres mathématiques**, publiées sous les auspices de la Société mathématique de France. Avec une introduction par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec un portrait de Galois; 1897..... 3 fr.

†**GOURSAT** (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse** *de la Faculté des Sciences de Paris.* 2 volumes grand in-8.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Avec 52 figures; 1902..... 20 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. Equations aux dérivées partielles. Eléments de calcul des variations*, avec 95 fig. 1905..... 20 fr.

†**GREENHILL** (**Alfred-George**), Professeur de Mathématiques au Collège de Woolwich. — **Les fonctions elliptiques et leurs applications.** Ouvrage traduit de l'anglais, par J. Griess, avec une préface de P. Appell, Membre de l'Institut. Gr. in-8 (25 × 16) de XVIII-574 p., avec 26 fig.; 1895. 18 fr.

†**HALPHEN** (**G.-H.**), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries ;* 1886..... 15 fr.

IIe Partie : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888..... 20 fr.

IIIe Partie : *Fragments* (*Quelques applications à l'Algèbre et particulièrement à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publication faite par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891..... 8 fr. 50 c.

†**HERMITE** (**Ch.**), Membre de l'Institut. — **Note sur la théorie des fonctions elliptiques.** In-8; 1894..... 3 fr. 50 c.

†**HOÜEL** (**J.**), Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Cours de Calcul infinitésimal.** Quatre beaux volumes grand in-8, avec figures; 1878-1879-1880-1881.

On vend séparément :

Tome I.....	15 fr.	Tome III.....	10 fr.
Tome II.....	15 fr.	Tome IV.....	10 fr.

†**HUMBERT** (**G.**), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse** *professé à l'Ecole Polytechnique;* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :

Tome I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques*, avec 111 figures; 1902..... 16 fr.

Tome II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions eulériennes. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions elliptiques et applications d'équations différentielles*, avec 91 figures; 1904..... 16 fr.

†**JORDAN** (**Camille**), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 2e édition revue et augmentée. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément :

Tome I. — Calcul différentiel; 1893..... 17 fr.
Tome II. — Calcul intégral (*Intégrales définies et indéfinies*); 1894. 17 fr.
Tome III. — Calcul intégral (*Équations différentielles*); 1896..... 15 fr.

†**JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**, publié par le Conseil d'Instruction de cet Établissement.

Ire série, 64 Cahiers in-4, avec figures et planches..... 1000 fr.
Table des matières contenues dans les 64 premiers Cahiers de la Ire série formant 45 volumes, suivie d'une Table analytique et d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4°..... 3 fr.

IIe Série, Ier Cahier; 1895..	10 fr.	IIe Série, VIIe Cahier; 1902.	12 fr.
» IIe Cahier; 1897..	10 fr.	» VIIIe Cahier; 1903.	10 fr.
» IIIe Cahier; 1897..	10 fr.	» IXe Cahier; 1904.	10 fr.
» IVe Cahier; 1898..	13 fr.	» Xe Cahier; 1905.	10 fr.
» Ve Cahier; 1900..	10 fr.	» XIe Cahier; 1906.	11 fr.
» VIe Cahier; 1901..	10 fr.		

†**LACROIX** (**S.-F.**). — **Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral.** 9e édition, revue et augmentée de Notes par *Hermite* et *J.-A. Serret*, Membres de l'Institut. 2 vol. in-8, avec pl.; 1881..... 15 fr.

†**LAGRANGE.** — **Œuvres complètes de Lagrange**, publiées par les soins de *J.-A. Serret* et *G. Darboux*, Membres de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet. (OUVRAGE COMPLET.)

La Ire Série comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette Série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément..... 30 fr.

La IIe Série se compose de 7 volumes qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits, savoir :

TOME VIII : *Résolution des équations numériques;* 1879..... 18 fr.

TOME IX : *Théorie des fonctions analytiques;* 1881..... 18 fr.

TOME X : *Leçons sur le Calcul des fonctions;* 1884..... 18 fr.

TOME XI : *Mécanique analytique* (Ire Partie, *Statique*), avec *Notes* de J. BERTRAND et G. DARBOUX; 1888..... 20 fr.

TOME XII : *Mécanique analytique* (IIe Partie, *Dynamique*), avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX; 1889..... 20 fr.

TOME XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE; 1882..... 15 fr.

TOME XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants*, publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE. Avec 2 fac-similés; 1892..... 15 fr.

***LAISANT** (C.-A.), Député, Docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Polytechnique. — **Introduction à la méthode des quaternions.** In-8, avec figures; 1881..... 6 fr.

***LAISANT** (C.-A.). — **Théorie et application des équipollences.** In-8, avec 73 figures; 1887..... 7 fr. 50 c.

†**LAPLACE.** — **Œuvres complètes de Laplace**, publiées, sous les auspices de l'Académie des Sciences, par les *Secrétaires perpétuels*, avec le concours de *Puiseux*, Membre de l'Institut, de *J. Hoüel*, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, de *F. Tisserand*, Membre de l'Institut, de *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, et de *Souillart*, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille. Nouvelle édition avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par *Tony Goutière*. In-4; 1878-1895

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4... 100 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre); 5 vol. in-4..... 130 fr.

Les Tomes III, IV et V, papier vergé, se vendent séparément..... 20 fr.

Les Tomes I à V, papier hollande, se vendent séparément..... 26 fr.

— **Exposition du Système du monde.** Tome VI (1884)..... 20 fr.

— **Théorie des probabilités.** Tome VII (1886)..... 35 fr.

Ce Volume, qui comprend 832 *pages sur papier fort, est d'un maniement peu facile pour les lecteurs qui veulent faire une longue étude de la* **Théorie des probabilités**; *aussi nous avons divisé un certain nombre d'exemplaires en deux fascicules. — Pour permettre de relier ultérieurement ces deux fascicules en un volume unique, nous avons joint au premier fascicule un titre de l'Ouvrage complet.* — Les fascicules se vendent séparément :

PREMIER FASCICULE ..... 15 fr.
SECOND FASCICULE ..... 20 fr.

Mémoires divers. Tomes VIII à XIII.

TOMES VIII, IX, X, XI et XII. — *Mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences;* 1891-1893-1894-1896-1898; chaque volume..... 20 fr.

TOME XIII. — *Mémoires extraits de la Connaissance des Temps;* 1904. 15 fr.

Le TOME XIV ET DERNIER (*Mémoires extraits de divers Recueils*) est *sous presse.*

†**LAURENT** (**H.**), Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Traité d'Analyse.** 7 volumes in-8, avec figures..... 73 fr.

TOME I : **Calcul différentiel.** *Applications analytiques et géométriques;* 1885. 10 fr.

TOME II : *Applications géométriques;* 1887 ..... 12 fr.

TOME III : **Calcul intégral.** *Intégrales définies et indéfinies;* 1888 . 12 fr.

TOME IV : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales;* 1889. 12 fr.

TOME V : *Equations différentielles ordinaires;* 1890..... 10 fr.

TOME VI : *Equations aux dérivées partielles;* 1890..... 8 fr. 50 c.

TOME VII ET DERNIER : *Applications géométriques des équations différentielles;* 1891..... 8 fr. 50 c.

†**LAURENT** (**H.**). — **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques.** In-8; 1882..... 3 fr. 50 c.

LEBESGUE (**Henri**), Ancien Elève de l'Ecole Normale supérieure, Prof. au Lycée de Nancy. — **Intégrale. Longueur. Aire.** (Thèse.) In-4; 1902. 5 fr.

†**LÉVY** (**Lucien**), Examinateur d'admission et Répétiteur d'Analyse à l'Ecole Polytechnique. — **Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec Tables numériques et applications.** Grand in-8, avec figures; 1898..... 7 fr. 50 c.

†**MÉRAY**, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques** (Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique). Quatre Parties se vendant séparément :

I^re^ PARTIE : *Principes généraux;* 1894..... 13 fr.

II^e^ PARTIE : *Étude monographique des principales fonctions d'une variable;* 1895 ..... 14 fr.

III^e^ PARTIE : *Questions analytiques classiques;* 1897 ..... 6 fr.

IV^e^ PARTIE : *Applications géométriques;* 1898..... ..... 7 fr.

PETIT-BOIS (**G.**), Ingénieur civil des Mines. — **Tables d'intégrales indéfinies.** In-4 (30 × 23), de XII-154 pages; 1906..... ..... 10 fr.

†**PICARD** (**Émile**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). Quatre volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I : *Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace et ses applications. Développements en séries. Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2^e^ édition, revue et corrigée; 1901..... ..... 16 fr.

Tome II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann*, 2e édition revue et augmentée, avec 58 fig.; 1905. 18 fr.

Tome III : *Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires;* avec figures; 1896..... 18 fr.

Tome IV : *Équations aux dérivées partielles*..... (*En préparation.*)

†**PICARD** (**E.**), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART**, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I : Volume de VI-256 pages, avec figures; 1897..... 9 fr.

Tome II : Volume de VI-528 pages, avec figures; 1906..... 18 fr.

†**PICARD** (**Emile**), Membre de l'Institut. — **Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences.** Conférences faites en Amérique en 1899 et 1904. In-8 (23 × 14) de VI-168 pages; 1905.... 3 fr. 50 c.

†**RAFFY**, Maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse.** *Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.

†**RESAL** (**H.**), Membre de l'Institut. — **Exposition de la Théorie des surfaces.** In-8, avec figures; 1891..... 4 fr. 50 c.

†**RIEMANN. — Œuvres mathématiques de Riemann,** traduites par L. Laugel. Avec une préface de Ch. Hermite et un Discours de Félix Klein. 1 vol. grand in-8, avec figures; 1898..... 14 fr.

†**ROUCHÉ** (**Eugène**), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **LÉVY** (**Lucien**), Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale** *à l'usage des Ingénieurs.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I : **Calcul différentiel** *Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de VIII-557 pages, avec 45 figures; 1900..... 15 fr.

Tome II : **Calcul intégral**: *Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume grand in-8 de 829 pages; 1903..... 15 fr.

†**SARRAU** (**Émile**), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Notions sur la théorie des quaternions.** Grand in-8; 1889.. 1 fr. 75 c.

†**SAUVAGE** (**L.**), Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. — **Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes.** In-4; 1895..... 6 fr.

SCHWARZ (**H.-A.**), Membre de l'Académie des Sciences et Professeur à l'Université de Berlin. — **Formules et Propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques,** *d'après des leçons et des notes manuscrites de* **K. Weierstrass,** Membre de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Berlin, rédigées et publiées par H.-A. Schwarz. Traduit de l'allemand par Henri Padé, Docteur ès Sciences mathématiques. 1re *Partie.* In-4; 1894.

Broché..... 12 fr. | Cartonné..... 15 fr.

†**SEGUIER** (**A. de**), Docteur ès Sciences mathématiques. — **Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits.** Grand in-8 (25 × 16) de VI-176 pages; 1904..... 5 fr.

†**SERRET** (**J.-A.**), Membre de l'Institut. — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** 5e édition, augmentée d'une *Note sur les Fonctions elliptiques;* par CH. HERMITE. 2 forts volumes in-8, avec figures; 1900..... 25 fr.

†**STOFFAES**, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures** à l'usage des candidats à la Licence ès Sciences physiques. 2e édition. In-8, avec figures; 1904..... 10 fr.

†**STURM**, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,** revu et corrigé par *E. Prouhet*, Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques,** par *H. Laurent*. 10e édition, mise au courant du nouveau programme de la Licence par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8, avec figures; 1895.

Broché..... 15 fr. | Cartonné..... 16 fr. 50 c.

†**TAIT** (**P.-G.**), Professeur de Sciences physiques à l'Université d'Édimbourg. — **Traité élémentaire des Quaternions.** Traduit sur la 2e édition anglaise, avec *Additions de l'Auteur et Notes du Traducteur*, par G. PLARR, Docteur ès Sciences mathématiques. Deux beaux volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparement :

Ire PARTIE : *Théorie.— Applications géométriques.* Gr. in-8; 1882. 7 fr. 50 c.

IIe PARTIE : *Géométrie des courbes et des surfaces. — Cinématique. — Applications à la Physique.* Grand in-8; 1884..... 7 fr. 50 c.

†**TANNERY** (**Jules**), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'Ecole Normale supérieure, et **MOLK** (**Jules**), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Eléments de la théorie des Fonctions elliptiques.** 4 volumes in-8 se vendant separément.

TOME I : *Introduction. — Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893. 7 fr. 50 c.
TOME II : *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896..... 9 fr.
TOME III : *Calcul intégral* (Ire Partie); 1898..... 8 fr. 50 c.
TOME IV : *Calcul intégral* (IIe Partie) *et Applications;* 1902... 9 fr.

VALLÉE-POUSSIN (**Ch.-J. de la**), Professeur à l'Université de Louvain, Correspondant de l'Académie royale de Belgique. — **Cours d'Analyse infinitésimale.** 2 volumes grand in-8 se vendant separément.

TOME I : Volume de XIV-372 pages; 1903..... 12 fr.
TOME II : Volume de XVI-440 pages; 1904..... 15 fr.

WEIERSTRASS (*Voir* **SCHWARZ**, p. 24).

†**VIVANTI** (**G.**). — **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations,** professées à l'Université de Messine, traduites par A. BOULANGER. Maître de Conférences à l'Uuiversité de Lille. Grand in-8 (25×16) de VII-296 pages, avec figures,; 1904..... 8 fr.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

†**APPELL** (**Paul**), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mecanique de la Faculte des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I. — *Statique. Dynamique du point.* 2e édition, avec 178 fig.; 1902. 18 fr.
TOME II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique,* avec 99 figures; 2e édition, 1904..... 16 fr.
TOME III : *Équilibre et mouvement des milieux continus,* avec 70 fig.; 1902. 17 fr.

†**APPELL** (P.), Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales**, conforme au programme du 27 juillet 1904. 2e édition entièrement refondue. In-8 (23 × 14) de 493 p., avec 186 figures; 1905..... 12 fr.

†**APPELL** (P.), Membre de l'Institut, et **CHAPPUIS** (James), Professeur à l'École Centrale. — **Leçons de Mécanique élémentaire** conformes aux programmes de 1902 et de 1905. 2e édition entièrement refondue. Deux volumes in-16, se vendant séparément.

I : Volume à l'usage des Elèves des Classes de Première C, D, 2e édition, avec 76 figures; 1905..... 2 fr. 75 c.

II : Volume à l'usage des Elèves des Classes de Mathématiques A et B. In-18 avec 103 figures; 1907..... 3 fr. 25 c.

†**BOUR** (Edm.), Ingénieur des Mines. — **Cours de Mécanique et Machines**, professé à l'École Polytechnique.

Cinématique. In-8, avec Atlas de 30 pl. in-4. 2e édition; 1887..... 10 fr.

Statique et travail des forces dans les machines à l'état de mouvement uniforme, publié par *Phillips*, Professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Collignon* et *Kretz*. In-8, avec Atlas de 8 pl. in-4, gravées sur acier, contenant 106 figures. 3e édition; 1900. 6 fr.

Dynamique et Hydraulique. 2e édition. In-8, avec 125 fig.; 1898.. 7 fr. 50 c.

†**BOUSSINESQ** (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons synthétiques de Mécanique générale**, servant d'Introduction au *Cours de Mécanique physique* de la Faculté des Sciences de Paris. Publiées par les soins de MM. Legay et Vigneron. Grand in-8; 1889..... 3 fr. 50 c.

†**BOUSSINESQ** (J.). — **Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section.** 2 vol. in-4; 1897.

Ier Mémoire : *Régime uniforme*..... 3 fr.

IIe Mémoire : *Étude des régimes graduellement variés*..... 3 fr.

†**BRESSE**, Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées. — **Cours de Mécanique appliquée, professé à l'École des Ponts et Chaussées.** — Ire Partie : *Résistance des matériaux et Stabilité des constructions*. 3e édition. In-8, avec figures; 1880..... 13 fr.

BRESSE. — Cours de Mécanique et Machines professé à l'Ecole Polytechnique. 2 beaux volumes in-8, se vendant séparément :

Tome I : *Cinématique. — Dynamique d'un point matériel. — Statique*. In-8, avec 236 figures; 1885..... 12 fr.

Tome II : *Dynamique des systèmes matériels en général. — Mécanique spéciale des fluides. — Étude des machines à l'état de mouvement*. In-8, avec 390 figures; 1885..... 12 fr.

†**BRISSE** (Ch.), Professeur à l'Ecole Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Cours de Mécanique** *à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales*, entièrement conforme au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique. Grand in-8, avec 44 figures; 1892. 3 fr. 25 c.

CELLÉRIER (Ch.), Professeur à l'Université de Genève. — **Cours de Mécanique.** Grand in-8, avec nombreuses figures; 1892..... 12 fr.

†**CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE** (Exposition universelle de 1900). — **Comptes rendus des Travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires**, publiés sous les auspices du Bureau du Congrès, par MM. É. Fichot et P. de Vanssay, Secrétaires. In-4 de XL-254 pages, avec figures; 1902. 15 fr.

†**CREMONA** (L.), Directeur de l'École d'application des Ingénieurs, à Rome. — **Les Figures réciproques en Statique graphique.** Ouvrage précédé d'une *Introduction* du Dr Giuseppe Jung, Professeur à l'Institut mécanique de Milan.

et suivi d'un *Appendice* extrait des Mémoires et du Cours de Statique graphique de Ch. Saviotti, professeur à l'École des ingénieurs à Rome. Traduit par Bossut, Capitaine du Génie. Gr. in-8, avec un Atlas de 34 pl.; 1885. 5 fr. 50

†**DULOS (Pascal)**, Professeur de Mécanique à l'École d'Arts et Métiers et à l'École des Sciences d'Angers. — **Cours de Mécanique**, à l'usage des Écoles d'Arts et Métiers et de l'enseignement spécial des Lycées. 5 volumes in-8, avec 608 figures. (*Ouvrage honoré d'une souscription des Ministères de l'Instruction publique, de l'Agriculture et des Travaux publics.*).... 37 fr. 50 c.

On vend séparément :

Tomes I, II, III, chaque volume..... 7 fr. 50 c.
Tome IV..... 9 fr. 50 c.
Tome V..... 5 fr. 50 c.

†**FAVARO (Antonio)**, Professeur à l'Université royale de Padoue. — **Leçons de Statique graphique**, traduites de l'italien par Paul Terrier, Ingénieur des Arts et Manufactures. 2 beaux volumes grand in-8, se vendant séparément :

Ire Partie : *Géométrie de position*. Grand in-8, avec 77 figures; 1879.. 7 fr.
IIe Partie : *Calcul graphique*, avec Appendice et Notes du traducteur. Grand in-8, avec 212 figures et 2 planches dans le texte; 1885... 12 fr.

*†**FREYCINET (de)**, de l'Institut. — **Sur les principes de la Mécanique rationnelle.** In-8 de VIII-170 pages; 1902..... 4 fr.

†**JOUFFRET**, Chef d'escadron d'Artillerie. — **Introduction à la théorie de l'énergie.** Petit in-8; 1883..... 3 fr. 50 c.

†**LAGRANGE. — Mécanique analytique**, avec Notes de *J. Bertrand*, Secretaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et *G. Darboux*, Membre de l'Institut. (Tomes XI et XII des *OEuvres complètes de Lagrange*.) 4e édition. 2 volumes in-4; 1888-1889, se vendant séparement..... 20 fr.

†**LAURENT (H.). — Traité de Mécanique rationnelle**, à l'usage des candidats à l'Agrégation et à la Licence. 3e ed. 2 volumes in-8, avec fig.; 1889. 12 fr.

†**LÉVY (Maurice)**, Membre de l'Institut. — **Sur le principe de l'énergie.** In-8; 1888..... 1 fr. 50 c.

†**MARTENS (A.)**. Directeur du Laboratoire royal d'Essais de Berlin-Charlottenbourg. — **Traité des essais des matériaux** *destinés à la construction des machines. Méthodes. Machines. Instruments de mesure.* Traduit de l'allemand avec Notes et Annexes; par Pierre Breuil. Chef de la section des métaux au Laboratoire d'essais du Conservatoire national des Arts et Métiers, ancien Directeur du Laboratoire d'essais de la Cie P.-L.-M. Grand in-8 (25 × 16) de 671 pages avec 558 figures et atlas (25 × 16) de 31 planches; 1904.... 50 fr.

†**MATHIEU (Emile)**, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon. — **Dynamique analytique.** In-4; 1878..... 15 fr.

OCAGNE (Maurice d'). — **Traité de Nomographie** (*voir* p. 9).

†**PICARD (Émile)**, Membre de l'Institut. — **Quelques réflexions sur la Mécanique suivies d'une première leçon de Dynamique.** Brochure in-8 de 56 pages; 1902..... 1 fr. 50 c.

†**PRESLE (de)**, ancien Élève de l'Ecole Polytechnique. — **Traité de Mécanique rationnelle.** In-8, avec 95 figures; 1869..... 5 fr.

†**RESAL (H.)**, Membre de l'Institut, Ingénieur en chef des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale**, comprenant les *Leçons professées à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole des Mines*. 7 vol. in-8, se vendant séparément :

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

TOME I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* 2e édition. In-8, avec 47 figures; 1895..... 6 fr. 50 c.

TOME II : *Du mouvement des solides en égard aux frottements. — Équilibre intérieur. — Elasticité. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique.* 2e édition. In 8, avec 41 figures; 1895..... 3 fr.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE (Moteurs et Machines).

TOME III : *Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'Horlogerie.* In-8, avec 213 belles figures; 1875. 11 fr.

TOME IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considérés comme moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machines à vapeur, à air chaud et à gaz.* In-8, avec 200 belles figures levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876..... 15 fr.

CONSTRUCTIONS.

TOME V : *Résistance des matériaux. — Constructions en bois. — Maçonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réservoirs.* In-8, avec 308 belles fig., levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1880. 12 fr. 50 c.

TOME VI : *Voûtes droites et biaises, en dôme*, etc. *— Ponts en bois. — Planchers et combles en fer. — Ponts suspendus. — Ponts-levis. — Cheminées. — Fondations de machines industrielles. — Amélioration des cours d'eau. — Substruction des chemins de fer. — Navigation intérieure. — Ports de mer.* In-8, avec 519 figures et 5 planches chromolithographiques; 1881... 15 fr.

DÉVELOPPEMENTS ET EXERCICES.

TOME VII : *Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure, comprenant de nombreux exercices.* In-8, avec 43 figures; 1889. 12 fr.

†**RESAL** (H.). — **Éléments de Mécanique**, rédigés d'après les Leçons de Mécanique physique professées à la Faculté des Sciences de Paris par Poncelet. Nouvelle édition, revue et corrigée. In-8, avec planches; 1862.... 4 fr. 50 c.

†**STURM**, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique de l'École Polytechnique**, publié, d'après le vœu de l'auteur, par *É. Prouhet*, Répétiteur à l'École Polytechnique. 5e édition (nouveau tirage), revue et annotée par *de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8, avec 189 figures; 1905..... 14 fr.

†**TANNERY** (J.), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Deux leçons de Cinématique**. In-4, avec figures; 1886..... 2 fr. 50 c.

†**TIMMERMANS**, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand — **Traité de Mécanique rationnelle**. 2e édition. Grand in-8; 1862..... 9 fr.

†**VIEILLE** (J.), Inspecteur général de l'Instruction publique. — **Éléments de Mécanique**, rédigés conformément au Programme du nouveau plan d'études des Lycées. 4e édition, revue et augmentée. In-8, avec 146 figures; 1882. 4 fr. 50 c.

***VILLIÉ** (E.). — **Traité de Cinématique**, à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation. In-8, avec figures; 1888..... 7 fr. 50 c.

ASTRONOMIE. MÉTÉOROLOGIE.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE DE PARIS, sis au Parc de Meudon (SEINE-ET-OISE), publiées par J. JANSSEN, Directeur. In-4.

TOME I. Volume de 124 pages avec 9 planches en héliogravure: 1896. 35 fr.
TOME II. Volume de IV-376 pages avec figures et 1 planche; 1906. 35 fr.
TOME III. (1er fascicule). Volume de 20 pages avec 9 planches; 1907. 6 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, publiées par M. *Maurice Lœwy*, Directeur. **Mémoires**, Tomes I à XXIV. In-4, avec planches; 1855-1904.

Les Tomes I à X et les Tomes XII, XIII, XV à XXIV se vendent séparément ..... 27 fr.

Le Tome XI (1876) et le Tome XIV (1877) comprennent deux *Parties* qui se vendent séparément ..... 20 fr.

Le Tome XXV est *sous presse*.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, publiées par M. *Maurice Lœwy*, Directeur. **Observations**. Tomes I à XXIV (observations des années 1800 à 1829 et 1837 à 1869). Chaque volume ..... 40 fr.

Années 1870 à 1891, 1897 à 1903. Chaque année ..... 40 fr.

Les observations des années 1892 à 1896 paraîtront ultérieurement.

Chaque volume se vend séparément ..... 40 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE BORDEAUX, publiées par *Rayet*, Directeur de l'Observatoire.

Tome I. In-4, avec figures et un plan de l'Observatoire; 1885 ..... 30 fr.

Tome II. Avec figures; 1887 ..... 30 fr.

Tome III. Avec 3 planches; 1889 ..... 30 fr.

Tomes IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI et XII; 1892; 1894; 1896; 1897; 1898; 1900; 1902; 1904; 1905 : chaque volume ..... 30 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE, MAGNÉTIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE DE TOULOUSE; publiées par *B. Baillaud*, Directeur de l'observatoire, Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse. In-4.

Tome I, avec 1 planche; 1880 ..... 30 fr.

Tome II, avec 1 planche; 1886 ..... 30 fr.

Tomes III, IV et V; 1899, 1901, 1902. Chaque volume ..... 30 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE NICE, publiées sous les auspices du *Bureau des Longitudes*, par *Perrotin*, Directeur (Fondation R. Bischoffsheim).

Tome I. Grand in-4, avec un Atlas contenant 47 planches; 1899 ..... 40 fr.

Tome II. Grand in-4, avec 7 belles planches, dont 3 en couleur; 1887. 30 fr.

Tome III, Grand in-4, avec une planche et un Atlas contenant 17 belles planches (spectre solaire de M. *Thollon*); 1890 ..... 40 fr.

Tome IV. Grand in-4; 1895 ..... 30 fr.

Tome V. Grand in-4, avec 41 planches; 1895 ..... 30 fr.

Tome VI. Grand in-4; 1897 ..... 30 fr.

Tome VII. Grand in-4 avec 90 planches; 1900 ..... 30 fr.

Tome VIII. Grand in-4 avec portrait de M. Perrotin et 2 pl.; 1904 ... 30 fr.

Tome IX. Grand in-4; 1905 ..... 30 fr.

Tome X. Grand in-4; 1905 ..... 30 fr.

ANNALES DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE, publiées par *E. Mascart*, Membre de l'Institut, Directeur.

De 1878 à 1885, le Bureau Central *a publié quatre volumes par an* : I. *Étude des orages en France*, *Mémoires divers*. — II. *Bulletin des observations françaises*. — III. *Pluies en France*. — IV. *Météorologie générale* (*voir* le Catalogue général).

Prix de chaque volume (sauf quelques volumes rares) ..... 15 fr.

Depuis l'année 1886, *les* Annales du Bureau central *forment trois volumes par an*.

I. — **Mémoires**. Grand in-4.

Années : 1886, avec 56 pl.; 1887, avec 38 pl.; 1888, avec 69 pl.; 1889, avec 25 pl.; 1890, avec 28 pl.; 1891, avec 36 pl.; 1892, avec 27 pl.; 1893, avec 31 pl.; 1894, avec 28 pl.; 1895, avec 29 pl.; 1896, avec 20 pl.; 1897, avec 16 pl.; 1898, avec 16 pl.; 1899, avec 16 pl.; 1900, avec 16 pl.; 1901, avec 16 pl.; 1902, avec 16 pl. Chaque année ..... 15 fr.

II. — Observations. Grand in-4.

Années : 1886 à 1903. Chaque année..... 15 fr.

III. — Pluies en France. Grand in-4.

Années : 1886 à 1898, avec 5 pl. chacune; 1893 à 1896 avec 13 pl. Chaque année..... 15 fr.

Années : 1897 à 1904, avec 4 pl. chacune. Chaque volume..... 10 fr.

Voir Bureau central.

ANNALES DU BUREAU DES LONGITUDES. Tome I. In-4, avec une planche sur acier; 1877..... 25 fr.

Tome II. In-4; 1883..... 25 fr.

Tome III. In-4; 1883..... 25 fr.

Tome IV. In-4, avec 2 pl.; 1890..... 25 fr.

Tome V. In-4, avec 4 pl.; 1897..... 25 fr.

Tome VI. In-4, avec 8 pl.; 1903..... 25 fr.

†**ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS. Météorologie, Chimie, Micrographie, Application à l'hygiène;** publiées sous la direction des chefs de service.

Prix pour un an (*4 fascicules*).

Paris..... 15 fr.

Départements et Union postale..... 16 fr.

Un spécimen est envoyé sur demande.

Les Tomes I à V (1900-1905) se vendent chacun..... 15 fr.

ATLAS PHOTOGRAPHIQUE DE LA LUNE, publié par l'Observatoire de Paris, exécuté par M. Lœwy, Directeur de l'Observatoire, et P. Puiseux, Astronome adjoint à l'Observatoire. 9 fascicules 1896-1897-1898-1899-1900-1902-1903-1904-1907.

Chaque fascicule comprend un volume in-4 de 40 à 60 pages et un Atlas de 6 ou 7 planches in-folio (64 × 80).

Prix de chaque fascicule..... 30 fr.

ATLAS LUNAIRE, publié par la Société Belge d'Astronomie, reproduisant à l'échelle des 2 5 les agrandissements photographiques de MM. Lœwy et P. Puiseux. 7 fascicules in-4; 1899-1905.

Chaque fascicule comprend 6 à 7 planches in-4 (26 × 33).

Prix de chaque fascicule..... 3 fr.

†**BAILLAUD (B.),** Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur de l'observatoire. — **Cours d'Astronomie** *à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales. Probabilités : erreurs des observations. Instruments d'Optique. Instruments d'Astronomie. Calculs numériques, interpolations;* avec figures; 1893..... 8 fr.

IIe Partie : *Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Eléments géographiques. Eclipses. Astronomie moderne,* avec 12 figures; 1896..... 15 fr.

BIGOURDAN (G.). Astronome à l'Observatoire de Paris. — **Observations de nébuleuses et d'amas stellaires.**

Tome I (2e Partie). *Observations différentielles :* 0^h à 11^h. In-4; 1906. 12 fr. 50 c.

Tome II. *Observations différentielles :* 11^h-19^h. In-4; 1906..... 25 fr.

Tome IV. *Observations différentielles :* 21^h-22^h. In-4; 1902..... 25 fr.

Tome V. *Observations différentielles :* 22^h-24^h. In-4; 1899..... 25 fr.

†**BIOT**, Membre de l'Académie des Sciences. — **Traité élémentaire d'Astronomie physique.** 3e édition, corrigée et augmentée. 5 vol. in-8, avec 94 planches; 1857..... 40 fr.

†**BOSSERT** (J.), Astronome à l'Observatoire de Paris. — **Catalogue d'étoiles brillantes** destiné aux Astronomes, Voyageurs, Ingénieurs, Marins. In-4 (28 × 22,5) de XV-75 pages; 1906..... 7 fr. 50 c.

BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE.

Voir ANNALES DU BUREAU CENTRAL (p. 29).

†**CARTE de l'éclipse totale de Soleil des 29 et 30 août 1905.** *Liste des points d'où l'on peut en observer les phases.* Carte dressée sous la direction du Bureau des Longitudes : de format (110 × 103) pliée sous couverture (25 × 16) 1905..... 2 fr. 50 c.

†**CASPARI**, Ingénieur hydrographe de la Marine. — **Cours d'Astronomie pratique.** *Application à la Géographie et à la Navigation.* 2 beaux volumes grand in-8 se vendant séparément (*Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences.*)

Ire PARTIE : *Coordonnées vraies et apparentes. Théorie des instruments.* Avec figures; 1888..... 9 fr.

IIe PARTIE : *Détermination des éléments géographiques. Applications pratiques;* 1889..... 9 fr.

CATALOGUE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Positions observées des étoiles (1837-1881). Grand in-4.

TOME I (0^h à 6^h); 1887..... 40 fr. | TOME III (12^h à 18^h); 1896. 40 fr.
TOME II (6^h à 12^h); 1891... 40 fr. | TOME IV (18^h à 24^h); 1903. 40 fr.

Catalogue des étoiles observées aux instruments méridiens (1837-1881). Grand in-4.

TOME I (0^h à 6^h); 1887.... 40 fr. | TOME III (12^h à 18^h); 1896. 40 fr.
TOME II (6^h à 12^h); 1891.. 40 fr. | TOME IV (18^h à 24^h); 1903. 40 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (OBSERVATOIRE DE PARIS). — **Coordonnées rectilignes.**

TOME I. Zone $+23°$ à $+25°$. Grand in-4 (32 × 25) de [52]-306 p.; 1902. 40 fr.
TOME II. Zone $+22°$ à $+24°$. Grand in-4 (32 × 25) de [16]-419 p.; 1907. 40 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL. (OBSERVATOIRE D'ALGER). — **Coordonnées rectilignes.**

INTRODUCTION par CH. TRÉPIED. Directeur de l'Observatoire. Grand in-4 (33 × 25) de CXXXVI pages; 1903. 15 fr.

TOME V : Zone $-1°$ à $1°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h56^m). Grand in-4 de IV-72 pages; 1903..... 8 fr.

TOME VI : Zone $-2°$ à $0°$ (1er fascicule de 0^h à 4^h28^m). Grand in-4 de 24 pages; 1903..... 3 fr.

TOME VII : Zone $-3°$ à $-1°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Grand in-4 de 48 pages; 1903..... 5 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (OBSERVATOIRE DE BORDEAUX). — **Coordonnées rectilignes.** Volume grand in-4 (33 × 25).

TOME I : Zone $+16°$ à $+18°$. Volume de 89-212 pages; 1905..... 10 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (Observatoire de Toulouse). — Coordonnées rectilignes.

Tome II : Zone $+8°$ à $+10°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Grand in-4 (32×25) de IV-40 pages; 1903..... 12 fr.

Tome IV : Zone $+6°$ à $+8°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h32^m). Grand in-4 (33×25) de VI-52 pages; 1904..... 10 fr.

Tome VI : Zone $+4°$ à $+6°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Grand in-4 (33×25) de VI-42 pages; 1904..... 10 fr.

Tome VII : Zone $+10°$ à $+12°$ (1er fascicule de 0^h à 6^h0^m). Grand in-4 (33×25) de XIII-41 pages; 1904..... 6 fr.

— 3e Fascicule : *Observations d'Eros.* Grand in-4 (33×25) de XXIV-82 p.; 1906..... 12 fr.

†**CONNAISSANCE DES TEMPS ou DES MOUVEMENTS CÉLESTES, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs,** publiée par le Bureau des Longitudes, pour l'an 1909. Grand in-8 de VIII-931 pages, avec 1 Carte en couleurs; 1906.

Broché..... 4 fr. | Cartonné..... 4 fr. 75 c.

Pour recevoir l'Ouvrage franco, dans tous les pays faisant partie de l'Union postale, ajouter 1 fr.

L'année 1908 est également en vente aux mêmes prix.

La *Connaissance des Temps pour l'an* 1910 est *sous presse.*

† **EXTRAIT DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS, à l'usage des Ecoles d'hydrographie et des marins du Commerce, pour l'an 1908,** publié par le *Bureau des Longitudes.* Grand in-8; 1906..... 1 fr. 50 c.

Par arrêté ministériel en date du 13 juillet 1887, l'emploi de cet Extrait ou de la Connaissance des Temps est prescrit comme base des calculs effectués par les aspirants aux grades de Capitaine au long cours et de Capitaine au cabotage. Les circulaires du Ministre de la Marine, en date des 17 et 22 décembre 1888, recommandent *expressement* et *exclusivement* ces deux Ouvrages aux Capitaines du Commerce.

†**CONSTAN (P.),** Ex-enseigne de vaisseau, Professeur d'hydrographie de la marine. — **Cours élémentaire d'astronomie et de navigation** à l'usage des capitaines au long cours et des élèves des écoles d'hydrographie : 2 volumes grand in-8 (25×16) avec nombreuses figures, se vendant séparément (*Ouvrage en harmonie avec les derniers programmes d'examens pour les brevets de capitaine au long cours*).

Tome I : *Astronomie.* Volume de IV-255 p. avec 138 fig.; 1903. 7 fr. 50 c.

Tome II : *Navigation.* Volume de IV-304 p., avec 159 fig.; 1904. 8 fr. 50 c.

†**CONSTAN (P.).** — **Tables graphiques d'azimut permettant de déterminer sans calculs et sans construction** *le relèvement et la hauteur d'un astre quelconque; le nom d'un astre observé; l'instant du lever et du coucher vrai d'un astre et son relèvement; l'instant des circonstances favorables au calcul d'heure et la hauteur correspondante; le coefficient de Pagel; les éléments nécessaires pour naviguer par l'arc du grand cercle.* In-4 (28×23) de 41 pages; 1906..... 3 fr.

DECANTE, Lieutenant de vaisseau en retraite. — **Tables d'azimut pour tous les points situés entre les cercles polaires et les astres dont la déclinaison est comprise entre 0° et 48°.** *Variation automatique, détermination instantanée du relèvement vrai.* Contrôle de la route. 7 volumes in-8; 1889-1892. (Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences et rendu réglementaire à bord des navires de l'Etat.) (*Voir* le Catalogue général.).... 12 fr.

†**FAYE (H.),** Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Sur l'origine du Monde.** *Etudes cosmogoniques des anciens et des modernes.* 3e édition, revue et corrigée. Un beau volume in-8, avec figures; 1896..... 6 fr.

†**FAYE** (H.). — **Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique.** 2 beaux volumes grand in-8, avec nombreuses figures et cartes.

Ire Partie : *Astronomie sphérique. — Géodésie et géographie mathématique;* 1881 ..... (*Épuisé.*)

IIe Partie : *Astronomie solaire. — Théorie de la Lune. — Navigation;* 1883..... 14 fr.

†**FLAMMARION** (Camille), Astronome. — **L'Astronomie. Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du Globe,** publiée par Camille Flammarion.

Ce Recueil ne paraît plus depuis le 1er janvier 1895.

Prix des années parues :

Tomes I à XIII, 1882 à 1894 (avec 2170 figures environ).

Chaque Tome : Broché..... 9 fr.

Relié avec luxe..... 13 fr.

Prix des 13 volumes..... 80 fr.

†**FLAMMARION** (Camille). — **La planète Mars et ses conditions d'habitabilité.** *Synthèse générale de toutes les observations.* Climatologie, météorologie, aréographie, continents, mers et rivages, eaux et neiges, saisons, variations observées. Grand in-8 jésus, avec 580 dessins télescopiques et 23 Cartes.

Broché..... 12 fr. | Cartonné avec luxe..... 15 fr.

†**FLAMMARION** (Camille). — **Études et lectures sur l'Astronomie.** In-12. Tomes I à IX, avec Cartes; 1867-1880.

Chaque volume se vend séparément..... 2 fr. 50 c.

FREYCINET (Ch. de), de l'Institut. — **Les Planètes télescopiques. Application de la théorie de Laplace.** Brochure in-8; 1900..... 1 fr.

GOEDSEELS (P.-J.-S.), Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, Professeur à l'Université catholique de Louvain. — **Théorie des erreurs d'observations.** In-8 (25×16) de XII-168 pages; 1902.

Broché..... 7 fr. 50 c. | Cartonné..... 8 fr. 50 c.

GUILHON (E.), Lieutenant de vaisseau. — **Théories météorologiques et Prévision du temps.** Gr. in-8, avec 29 fig. et Tables; 1894..... 2 fr. 50 c.

†**HÉMENT** (Félix). — **Les étoiles filantes et les bolides.** Petit in-8, avec 31 figures; 1888..... 2 fr. 50 c.

HILDEBRANDSSON (le Dr H.), Professeur à l'Université Royale et Directeur de l'observatoire météorologique d'Upsal, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Suède et du Comité météorologique international, et **TEISSERENC DE BORT** (Léon), Météorologiste au Bureau Central météorologique de France, Directeur de l'observatoire de Météorologie dynamique. — **Les bases de la Météorologie dynamique.** *Historique. Etat de nos connaissances.* Deux volumes grand in-8, paraissant en 12 à 15 livraisons avec fig. et pl., se vendant séparément.

Tome I. — Ire Livraison, avec figures et 2 planches; 1898..... 2 fr.

IIe Livraison, avec figures et 20 planches; 1900..... 4 fr.

IIIe Livraison..... (*Sous presse.*)

Tome II. — IVe Livraison, avec figures et 3 planches; 1900..... 3 fr.

Ve Livraison, avec figures et 20 planches; 1902..... 2 fr. 50 c.

VIe Livraison, avec figures et 12 planches; 1903..... 2 fr.

VIIe Livraison, avec 2 figures et 21 planches; 1904..... 3 fr.

VIIIe Livraison, avec 3 figures et 7 planches; 1905..... 2 fr.

†**HIRN** (G.-A.). — **La Constitution de l'espace céleste.** Grand in-4 de 350 pages, avec 1 planche; 1889..... 20 fr.

†**HIRN (G.-A.).** — **Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne.** In-4, avec planche; 1872..... 4 fr.

†**HOÜEL (J.).** — **Sur le développement de la fonction perturbatrice, suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes.** In-8; 1875..... 3 fr.

†**LAGRANGE (Ch.),** ancien Élève de l'École militaire, membre de l'Académie, Professeur à l'École militaire. Astronome à l'Observatoire royal. — **Etude sur le système des forces du monde physique.** In-4; 1892..... 20 fr.

†**LAPLACE. — Œuvres complètes.** (*Voir* p. 22.)

†**LEBON (E.),** Membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne, Professeur agrégé de mathématiques au Lycée Charlemagne. — **Histoire abrégée de l'Astronomie.** Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs, avec 16 portraits et 1 Carte céleste; 1899 (*Ouvrage couronné par l'Académie française*)..... 8 fr.

†**LÉVY (Maurice),** Membre de l'Institut, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Professeur au Collège de France. — **Leçons sur la théorie des marées,** professées au Collège de France. 2 volumes in-4 se vendant séparément.

I^re^ Partie : *Théories élémentaires. Formules pratiques de prévision des marées.* Avec figures; 1898..... 14 fr.

II^e^ Partie : *Théorie de Laplace et marées terrestres...* (*En préparation.*)

LIGONDÈS (Vicomte R. du), Lieutenant-Colonel d'Artillerie. — **Formation mécanique du système du Monde,** avec un *Résumé de la nouvelle théorie;* par l'abbé Th. Moreux, Prof^r^ de Mathématiques. In-8, avec 49 figures; 1897. 5 fr.

†**LOOMIS (Élias),** Professeur de Philosophie naturelle à l'Yale College (Etats-Unis). — **Mémoires de Météorologie dynamique;** Exposé des résultats de la discussion des Cartes du Temps des États-Unis, ainsi que d'autres documents; traduit de l'anglais par *H. Brocard*, capitaine du Genie. Grand in-8, avec figures et 18 planches; 1880..... 3 fr.

MASCART (Jean), Astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris. — **La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens.** Grand in-8 (25 × 16) de 58 p.; avec reproduction de dessins anciens (27 figures); 1907..... 2 fr.

†**MÉMAIN (l'Abbé).** — **Étude sur l'unification du Calendrier et la véritable échéance du jour de Pâques.** In-4; 1899..... 2 fr.

OBSERVATOIRE D'ALGER. — Tables et Cartes d'occultations. *Théorie et applications.* par Ch. Trépied, Directeur de l'Observatoire. Grand in-4 (33×25) de LXXIX-45 pages, avec 7 cartes; 1905.

Broché..... 12 fr. | Cartonné..... 15 fr.

†**OPPOLZER (Le Chevalier Théodore d').** Professeur d'Astronomie à l'Université de Vienne, Membre de l'Académie des Sciences de Vienne, Correspondant de l'Institut de France, etc. — **Traité de la détermination des orbites des Comètes et des Planètes.** Édition française publiée, d'après la deuxième édition allemande, par *Ernest Pasquier,* Docteur en Sciences physiques et mathématiques, Professeur d'Astronomie à l'Université de Louvain, etc. Un beau vol. petit in-4 (500 p. de texte et plus de 200 p. de Tables); 1886... 20 fr.

†**POINCARÉ (H.),** Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques;* 1892..... 12 fr.

TOME II : *Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin;* 1894. 14 fr.

TOME III ET DERNIER : *Invariants intégraux. Stabilité. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques;* 1899.. 15 fr.

†**POINCARÉ** (H.). — **Leçons de Mécanique céleste** *professées à la Sorbonne.* 3 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

TOME I : *Théorie générale des perturbations planétaires.* Volume de VI-367 pages, avec figures; 1905..... 12 fr.

TOME II (1re Partie) : *Développement de la fonction perturbatrice.* Volume de IV-167 pages; 1907..... 6 fr.

TOME II (2e Partie) : *Théorie des petites planètes. Théorie de la Lune.* (*En préparation.*)

†**PUISEUX** (V.), Membre de l'Institut. — **Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune.** In-4; 1873..... 5 fr.

†**RESAL** (H.), Membre de l'Institut. Professeur à l'École Polytechnique et à l'École supérieure des Mines. — **Traité de Mécanique céleste.** 2e édition. Un beau volume in-4; 1884..... 25 fr.

ROUGET (Ch.), Ancien Inspecteur général des Finances. — **Théorie des Observations circumzénithales.** Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 20 novembre 1897. Grand in-8, avec 6 figures; 1900..... 1 fr. 25 c.

†**SCOTT** (Robert), Directeur du Service météorologique de Londres. — **Cartes du temps et avertissements de tempêtes.** Petit in-8, avec 2 planches en couleur et 52 figures. Traduit de l'anglais par *Zurcher* et *Margollé;* 1879. 4 fr. 50 c.

†**SECCHI** (le P. A.), Directeur de l'Observatoire du Collège Romain, Correspondant de l'Institut de France. — **Le Soleil.** 2e édition. PREMIÈRE ET SECONDE PARTIE. Deux beaux volumes grand in-8 avec Atlas; 1875-1877. Brochés. 30 fr. Reliés.. 40 fr.

On vend séparément :

Ire PARTIE. Un volume grand in-8, avec 150 figures, et un Atlas comprenant 6 grandes planches gravées sur acier (I. *Spectre ordinaire du Soleil* et *Spectre d'absorption atmosphérique.* — II. *Spectre de diffraction,* d'après la photographie de HENRY DRAPER. — III, IV, V et VI. *Spectre normal du Soleil.* d'après ANGSTRÖM, et *Spectre normal du Soleil, portion ultra-violette,* par A. CORNU); 1875..... 18 fr.

IIe PARTIE. Un volume grand in-8, avec 280 figures et 13 planches, dont 12 en couleur (I à VIII. *Protubérances solaires.* — IX. *Type de taches du Soleil.* — X et XI. *Nébuleuses,* etc. — XII et XIII. *Spectres stellaires*); 1877. 18 fr.

†**SOUCHON** (Abel), Membre adjoint du Bureau des Longitudes, attaché à la rédaction de la *Connaissance des Temps.* — **Traité d'Astronomie pratique,** comprenant l'exposition du *Calcul des éphémérides astronomiques et nautiques,* d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac,* avec une Introduction historique et de nombreuses Notes. Grand in-8, avec figures; 1883..... 15 fr.

SPÉE (le chanoine Eug.), Docteur ès Sciences, Astronome à l'Observatoire royal de Belgique. — **Région *b-f* du spectre solaire.** Un volume de texte in-4, avec atlas in-folio de 17 planches (32 × 50); 1899..... 40 fr.

†**TANNERY** (Paul). — **Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne.** Grand in-8, avec figures; 1893..... 6 fr.

†**TISSERAND** (F.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Paris. — **Traité de Mécanique céleste.** 4 volumes in-4, avec figures. (OUVRAGE COMPLET.)

Tome I : *Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires;* 1889..... 25 fr.

Tome II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation;* 1891..... 28 fr.

Tome III : *Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune;* 1894..... 22 fr.

Tome IV et dernier : *Théories des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes;* 1896..... 28 fr.

— **Leçons sur la détermination des orbites**, professées à la Faculté des Sciences de Paris, rédigées et développées pour les *Calculs numériques;* par J. Perchot, Docteur ès Sciences, Astronome adjoint à l'Observatoire; avec une Préface de H. Poincaré, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Professeur à la Faculté des Sciences. In-4, avec figures; 1899. 6 fr. 50 c.

†**VILLARCEAU** (Yvon), Membre de l'Institut, et **AVED DE MAGNAC**, Lieutenant de vaisseau. — **Nouvelle navigation astronomique.** (L'heure du premier méridien est déterminée par l'emploi seul des chronomètres.) **Théorie et Pratique.** Un beau volume in-4, avec planche; 1877..... 20 fr.

On vend séparément : { **Théorie**, par *Yvon Villarceau*..... 10 fr. ; **Pratique**, par *Aved de Magnac*..... 12 fr.

†**WOLF** (C.), Membre de l'Institut, Astronome honoraire de l'Observatoire. — **Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793.** Grand in-8 de XII-392 pages, avec 16 planches; 1902..... 15 fr.

PHYSIQUE. — ÉLECTRICITÉ. THERMODYNAMIQUE.

†**ABRAHAM** (Henri), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure, Secrétaire général de la Société française de Physique. — **Recueil d'expériences élémentaires de Physique**, publié avec la collaboration de nombreux physiciens. Deux volumes in-8 (23 × 14).

I^re^ Partie : *Travaux d'atelier. Géométrie et Mécanique. Hydrostatique. Chaleur.* Volume de XII-247 pages, avec 260 figures; 1904.
Broché..... 3 fr. 75 c. | Cartonné..... 5 fr.

II^e^ Partie : *Acoustique. Optique. Electricité et Magnétisme.* Volume de XII-454 pages, avec 424 figures; 1904.
Broché..... 6 fr. 25 c. | Cartonné..... 7 fr. 50 c.

†**ABRAHAM** (Henri) et **LANGEVIN** (Paul). — **Les quantités élémentaires d'électricité : ions, électrons, corpuscules.** Un volume en deux fascicules grand in-8 (25 × 16) de XVI-1138 pages, avec nombreuses figures; 1905 (*Mémoires de la Société de Physique*, 2^e^ série)..... 35 fr.

†**AUERBACH** (D^r^ Félix), Professeur à l'Université d'Iéna. — **La Dominatrice du Monde et son ombre.** *Conférence sur l'énergie et l'entropie.* Édition française publiée avec l'assentiment de l'auteur par le D^r^ E. Robert-Tissot, Médecin à La Chaux-de-Fonds (Suisse). Préface de Ch.-Ed. Guillaume, Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. In-16 (19 × 12) de XV-86 pages; 1905..... 2 fr. 75 c.

†**BERTHELOT**, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Traité pratique de Calorimétrie chimique.** Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée. Volume in-8 (23 × 14) de XIII-317 pages, avec 27 figures; 1905.. 6 fr.

†**BERTRAND** (J.), de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Leçons sur la Théorie mathématique de l'Électricité.** Grand in-8, avec figures; 1890..... 10 fr.

†**BERTRAND** (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Thermodynamique.** Grand in-8; 1887..... 10 fr.

†**BICHAT** (E.), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, et **BLONDLOT** (R.), Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Introduction à l'étude de l'Electricité statique et du magnétisme.** 2e édition. In-8, avec 83 figures; 1907..... (*Sous presse.*)

†**BLONDLOT**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Introduction à l'étude de la Thermodynamique.** Grand in-8, avec figures; 1888. 3 fr. 50 c.

†**BOLTZMANN** (L.), Professeur à l'Université de Leipzig. — **Leçons sur la Théorie des gaz.** Avec une *Introduction* et des *Notes* de M. Brillouin, Professeur au Collège de France. 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :

Ire Partie : Traduction par A. Gallotti, ancien Élève de l'École normale. Volume de XIX-204 pages, avec figures; 1902..... 8 fr.

IIe Partie : Traduction par A. Gallotti et H. Bénard, anciens Élèves de l'École normale, avec une *Introduction* et des *Notes* de M. Brillouin, Professeur au Collège de France. Volume de XII-280 pages, avec figures; 1904. 10 fr.

†**BOUASSE** (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Bases physiques de la Musique.** In-8 écu (20 × 13), de 112 pages, avec 8 figures; 1906. Cartonné (*C. Sc.*)..... 2 fr.

†**BOUSSINESQ** (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur**, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la Lumière. (Cours de Physique mathématique de la Faculté des Sciences.) Deux volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

Tome I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures; 1901..... 10 fr.

Tome II : *Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* Volume de XXXII-625 pages avec 14 figures; 1903 18 fr.

†**BOUTY** (E.). — **Radiations. Electricité. Ionisation.** IIIe supplément au Cours *de Physique de l'Ecole Polytechnique*, par Jamin et Bouty. In-8 avec 104 fig.; 1906..... 8 fr.

†**BOYS** (C.-V.), Membre de la Société Royale de Londres. — **Bulles de Savon.** Quatre conférences sur la capillarité faites devant un jeune auditoire. Traduit de l'anglais par Ch.-Ed. Guillaume. Docteur ès Sciences, avec de nouvelles Notes de l'Auteur et du Traducteur. In-18 jésus, avec 60 figures et 1 planche; 1892..... 2 fr. 75 c.

†**BRILLOUIN** (Marcel), Professeur au Collège de France. — **Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

Ire Partie : *Généralités. Viscosité des liquides.* Volume de VII-224 pages, avec 65 figures, 1906..... 9 fr.

IIe Partie : *Viscosité des gaz. Caractères généraux des théories moléculaires*..... (*Sous presse.*)

†**BRILLOUIN** (Marcel). — **Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique.** Ire Partie : *Tourbillons.* Exposé des Travaux de Von Helmholtz, Kirchhoff, Sir W. Thomson, Lord Rayleigh. In-4, avec figures; 1891..... 2 fr. 50 c.

†**BRIOT** (Ch.). — **Théorie mécanique de la chaleur.** 2e édition, publiée par Mascart, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique. In-8, avec figures; 1883..... 7 fr. 50 c.

†**BRUNHES** (**Bernard**). Docteur ès Sciences, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, Professeur d'Électricité à l'Institut industriel du nord de la France. — **Cours élémentaire d'Électricité.** *Lois expérimentales et principes généraux. Introduction à l'Électrotechnique.* In-8, avec figures; 1895..... 5 fr.

BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. — **Procès-verbaux des séances.** In-8.

Années 1875-1876 et Années 1877 à 1892, 1894, 1895, 1897, 1899, 1900, 1901, 1903, 1905. Chaque Volume..... 2 fr. 50 c.

— **Travaux et Mémoires** du Bureau international des Poids et Mesures, publiés par le *Directeur* du Bureau. 11 volumes grand in-4, avec figures et planches. Les Tomes I et II sont épuisés. Les Tomes III à VII (1884-1890) se vendent chacun..... 30 fr.

Les Tomes VIII à XII se vendent séparément..... 15 fr.

— **Détermination de l'Étalon provisoire international.** Rapport de la Commission mixte, par A. Cornu, Rapporteur, avec la coopération de J.-René Benoit. Gr. in-4; 1893..... 3 fr.

*CAURO (J.), Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé des Sciences physiques, Docteur ès Sciences. — **Liquéfaction des gaz.** Méthodes nouvelles. Applications. Grand in-8, avec 40 figures; 1899..... 2 fr. 75 c.

†**CHAPPUIS** (J.), Agrégé, Docteur ès Sciences, Professeur de Physique générale à l'École Centrale, et **BERGET** (A.), Docteur ès Sciences, attaché au Laboratoire des Recherches physiques de la Sorbonne. — **Leçons de Physique générale.** *Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures et complété suivant le programme de la Licence ès Sciences physiques.* 3 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : *Instruments de mesure. Chaleur*, 2e édition. (*Sous presse.*)

Tome II : *Électricité et Magnétisme.* 2e édition entièrement refondue. Avec 389 figures; 1900..... 15 fr.

Tome III : *Acoustique. Optique. Electro-optique.* 2e édition. (*En préparation.*)

†**CHAPPUIS** (J.) et **BERGET** (A.). — **Cours de Physique générale** à l'usage des candidats aux Écoles spéciales (conforme aux derniers programmes). Grand in-8 de IV-697 pages avec 465 figures; 1898.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).. 17 fr.

†**CHEVREUL** (E.). — **De la Loi du contraste simultané des couleurs et de l'assortiment des objets colorés considéré d'après cette loi** *dans ses rapports avec la peinture, les tapisseries des Gobelins, les tapisseries de Beauvais pour meubles, les tapis, la mosaïque, les vitraux colorés, l'impression des étoffes, l'imprimerie, l'enluminure, la décoration des édifices, l'habillement et l'horticulture*, avec une Introduction de M. H. Chevreul fils. Nouvelle édition publiée à l'occasion du Centenaire. Grand in-4, avec 40 planches, dont 36 en couleur; 1889. Cartonné (*Rare*)..... 54 fr.

†**COLSON** (R.), Capitaine du Génie. — **Traité élémentaire d'Électricité, avec les principales applications.** 3e édition, entièrement refondue. In-18 jésus, avec 91 figures; 1900..... 3 fr. 75 c.

†**CONGRÈS INTERNATIONAL D'ÉLECTRICITÉ** (Exposition universelle internationale de 1900. Paris, 18-25 août 1900.) 2 volumes grand in-8 publiés par les soins de E. Hospitalier, Secrétaire général, et se vendant séparément.

Rapports et Procès-verbaux. Volume de 528 pages avec fig.; 1901. 15 fr.

Annexes. Volume de 320 pages avec figures; 1903..... 10 fr.

†**CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE DE 1900.** — **Travaux du Congrès international de Physique** réuni à Paris en 1900 sous les auspices de la Société française de Physique, rassemblés et publiés par Ch.-Ed. Guillaume et L. Poincaré, Secrétaires généraux du Congrès. 4 beaux volumes grand in-8, avec figures.

Tomes I, II et III : *Rapports présentés au Congrès;* 1900. Les 3 volumes, ensemble ..... 50 fr.

On vend séparément :

Tome I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire*..... 18 fr.

Tome II : *Optique. Electricité et magnétisme*..... 18 fr.

Tome III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique*..... 18 fr.

Tome IV : *Procès-verbaux. Annexes. Liste des Membres;* 1901..... 6 fr.

†**CORNU** (**A.**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Notices sur l'Electricité.** *Électricité statique et dynamique. Production et transport de l'énergie électrique;* avec une Préface de A. Potier, Membre de l'Institut. (Notices extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*). In-16 (19 × 12) avec figures; 1904..... 5 fr.

†**CROOKES** (**William**). — **Sur la viscosité des gaz très raréfiés.** In-8, avec figures; 1882..... 2 fr.

†**CURIE** (**Mme Sklodowska**). — **Recherches sur les substances radioactives** (Thèse). 2e édition. Grand in-8 (25 × 16) de 155 p., avec 14 fig.; 1904. 5 fr.

†**DUHEM** (**Pierre**), Correspondant de l'Institut de France, Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Recherches sur l'Hydrodynamique.** Deux volumes in-4 (28 × 22) se vendant séparément.

Ire Série : *Principes fondamentaux de l'hydrodynamique. Propagation des discontinuités, des ondes et des quasi-ondes.* In-4; 1903..... 10 fr.

IIe Série : *Des conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité au voisinage de l'état critique.* In-4 avec figures; 1904..... 7 fr. 50 c.

†**DUHEM.** — **Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.** Trois volumes gr. in-8, avec 215 figures se vendant séparément :

Tome I : *Conducteurs à l'état permanent*, avec 112 figures; 1891..... 16 fr.

Tome II : *Les Aimants et les corps diélectriques*, avec 32 figures; 1892. 14 fr.

Tome III : *Courants linéaires*, avec 71 figures; 1892..... 15 fr.

†**DUHEM** (**Pierre**). — **Recherches sur l'Elasticité.** *De l'équilibre du mouvement des milieux vitreux. Les milieux vitreux peu déformés. La stabilité des milieux élastiques. Propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux et non visqueux.* In-4 (28 × 23) de 218 pages; 1906..... 12 fr.

ESTANAVE (**E.**), Docteur ès Sciences, membre de la Société mathématique de France. — **Nomenclature des Mémoires de Physique expérimentale et de Physique mathématique** *présentés en France dans le courant du XIXe siècle devant les Facultés des Sciences en vue du Doctorat.* Grand in-8 de 20 pages; 1903..... 1 fr.

†**EVERETT**, Professeur de Philosophie naturelle au Queen's College de Belfast. — **Unités et Constantes physiques.** Ouvrage traduit de l'anglais par Jules Raynaud, Docteur ès Sciences, professeur à l'École supérieure de Télégraphie, avec le concours de *Thévenin, de la Touanne* et *Massin*, Sous-Ingénieurs des Télégraphes. In-18 jésus; 1883..... 4 fr.

†**EXPÉRIENCES** faites à l'Exposition d'électricité par Allard, Le Blanc, Joubert, Potier et Tresca. — *Méthodes d'observations. — Machines et lampes à courant continu, à courants alternatifs. — Bougies électriques. — Lampe à incandescence. — Accumulateur. — Transport électrique du travail. — Machines diverses.* In-8, avec planches; 1883 ..... 3 fr.

†**FABRY** (Ch.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Marseille. — **Leçons élémentaires d'Acoustique et d'Optique** à l'usage des candidats au *Certificat d'études physiques, chimiques et naturelles.* In-8, avec 205 figures; 1898 ..... 7 fr. 50 c.

FOUCAULT (Léon). Membre de l'Institut. — **Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault**, publié par Mme Ve Foucault, sa mère, mis en ordre par Gariel, Professeur agrégé de Physique à la Faculté de Médecine de Paris, et précédé d'une *Notice sur les Œuvres de L. Foucault*, par J. Bertrand, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Un beau volume in-4, avec un Atlas de même format, contenant 19 planches gravées sur cuivre; 1878 ..... 30 fr.

†**FOURIER.** — **Œuvres de Fourier**, publiées par les soins de *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique.

Tome I : *Théorie analytique de la chaleur.* In-4, XXVIII-564 p.; 1888. 25 fr.

Tome II : *Mémoires divers.* In-4, XVI-636 pages, avec un portrait de Fourier en héliogravure ..... 25 fr.

†**GIBBS** (J.-W.), Professeur au Collège Yale, à Newhaven. — **Diagrammes et surfaces thermodynamiques.** Traduction de G. Roy, Chef des travaux de Physique à l'Université de Dijon, avec une Introduction de B. Brunhes, Professeur à l'Université de Clermont. In-8 écu de 86 pages, avec figures, cartonné (*C. S.*): 1903 ..... 2 fr.

†**GUÉBHARD** (A.), Docteur en médecine, Préparateur de Physique à la Faculté de Médecine de Paris. — **Effets des variations de la pression extérieure sur l'organisme.** In-4, avec 31 figures; 1883 ..... 5 fr.

†**GUILLAUME** (Ch.-Ed.), Docteur ès Sciences, Attaché au Bureau international des Poids et Mesures. — **Traité pratique de la Thermométrie de précision.** Grand in-8, avec 45 figures et 4 planches sur cuivre; 1889 ..... 12 fr.

†**GUILLAUME** (Jacques), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Notions d'Electricité.** *Son utilisation dans l'Industrie. D'après les cours faits à la Fédération nationale des Chauffeurs, Conducteurs, Mécaniciens. Automobilistes de toutes industries.* In-8 (23×14) de IX-351 pages, avec 154 figures; 1905. 7 fr. 50 c.

HIRN (G.-A.). — **Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température.** *Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences.* Grand in-4, avec 4 planches; 1882 ..... 6 fr.

HIRN (G.-A.). — **Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température.** *Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences, suivies de réflexions générales au sujet des rapports de MM. les commissaires examinateurs de ce Mémoire.* In-4, avec 3 planches; 1886 ..... 8 fr.

†**HIRN** (G.-A.), Correspondant de l'Institut. — **Théorie mécanique de la chaleur.** *Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur.* 3e édition, entièrement refondue. 2 vol. grand in-8, avec figures.

Tome I; 1875 ..... 12 fr.

Tome II; 1876 ..... 12 fr.

HIRN (G.-A.). — **La Cinétique moderne et le Dynamisme de l'avenir.** *Réponse à diverses critiques faites par Clausius.* In-4, avec 2 pl.; 1887. 5 fr.

†**JAMIN** (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, et **BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique.** 4e édition, augmentée et entièrement refondue. 4 forts vol. in-8, de plus de 4000 pages, avec 1587 figures et 14 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1885-1891. (*Autorisé par décision ministérielle*). *Ouvrage complet*..... 72 fr.

On vend séparément :

TOME I. — 9 fr.

1er FASCICULE. — *Instruments de mesure, Hydrostatique;* avec 150 figures et 1 planche; 1888..... 5 fr.

2e FASCICULE. — *Physique moléculaire,* avec 93 figures; 1891..... 4 fr.

TOME II. — CHALEUR. — 15 fr.

1er FASCICULE. — *Thermométrie, Dilatations;* avec 98 fig.; 1885..... 5 fr.

2e FASCICULE. — *Calorimétrie,* avec 48 fig. et 2 planches; 1885..... 5 fr.

3e FASCICULE. — *Thermodynamique. Propagation de la chaleur,* avec 47 figures; 1886..... 5 fr.

TOME III. — ACOUSTIQUE ; OPTIQUE. — 22 fr.

1er FASCICULE. — *Acoustique;* avec 123 figures; 1887..... 4 fr.

2e FASCICULE. — *Optique géométrique;* avec 139 figures et 3 planches; 1886. 4 fr.

3e FASCICULE. — *Étude des radiations lumineuses, chimiques et calorifiques. Optique physique;* avec 249 figures et 5 planches, dont 2 planches de spectres en couleur; 1887..... 14 fr.

TOME IV (1re Partie). — ELECTRICITÉ STATIQUE ET DYNAMIQUE. — 13 fr.

1er FASCICULE. — *Gravitation universelle. Electricité statique;* avec 155 figures et 1 planche; 1890..... 7 fr.

2e FASCICULE. — *La pile. Phénomènes électrothermiques et électrochimiques,* avec 161 figures et 1 planche; 1888..... 6 fr.

TOME IV (2e Partie). — MAGNÉTISME; APPLICATIONS. — 13 fr.

3e FASCICULE. — *Les aimants. Magnétisme. Electromagnétisme. Induction,* avec 240 figures; 1889..... 8 fr.

4e FASCICULE. — *Météorologie électrique. Applications de l'électricité. Théories générales;* avec 84 figures et 1 planche; 1891..... 5 fr.

Des **Suppléments** *destinés à exposer les progrès accomplis viendront compléter ce grand Traité et le maintenir au courant des derniers travaux.*

Ier SUPPLÉMENT. — *Chaleur. — Acoustique et optique ;* par E. BOUTY, Professeur à la Faculté des Sciences. In-8, avec 41 figures; 1896..... 3 fr. 50 c.

IIe SUPPLÉMENT. — *Progrès de l'Électricité. Oscillations hertziennes. Rayons cathodiques. Rayons X;* par E. BOUTY, Professeur à la Faculté des Sciences. In-8, avec 45 figures et 2 planches; 1899..... 3 fr. 50 c.

IIIe SUPPLÉMENT. — *Radiations. Electricité. Ionisation;* par E. BOUTY, Professeur à la Faculté des Sciences. In-8 avec 104 figures; 1906..... 8 fr.

— **Tables générales,** par ordre de matières et par noms d'auteur, des quatre volumes du *Cours de Physique.* In-8; 1891..... 0 fr. 60 c.

†**JAMIN** (J.) et **BOUTY.** — **Cours de Physique à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales.** 2e édition. Deux volumes in-8, contenant plus de 1060 p., avec 458 fig. et 6 pl. sur acier; 1886..... 20 fr.

On vend séparément :

TOME I. — *Instruments de mesure, Hydrostatique, Optique géométrique. Notions sur les phénomènes capillaires.* In-8, avec 312 figures et 4 pl. 10 fr.

TOME II. — *Thermométrie, Dilatations, Calorimétrie.* In-8, avec 146 figures et 2 planches..... 10 fr.

†**JENKIN** (Fleeming), Professeur de Mécanique à l'Université d'Edimbourg. — **Électricité et Magnétisme.** Traduit de l'anglais sur la 8ᵉ édition par H. Berger, Directeur-Ingénieur des lignes télégraphiques, ancien Élève de l'École Polytechnique, et Croullebois, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, ancien Élève de l'École Normale supérieure. Édition française augmentée de Notes importantes sur les *lois de Coulomb*, la *déperdition électrique*, le *potentiel*, les *tubes de force*, l'*énergie électrique*, la *transmission de la force*, etc. Un fort volume petit in-8, avec 270 figures; 1884..... 12 fr.

†**LAGRANGE** (Ch.). (*Voir* page 34.)

†**LEMSTRÖM**, Professeur de Physique à l'Université d'Helsingfors. — **L'aurore boréale.** *Étude générale des phénomènes produits par les courants électriques de l'atmosphère.* Grand in-8, avec figures et 14 planches, dont 5 en chromolithographie; 1886..... 6 fr. 50 c.

LEMSTRÖM (Selim), Professeur de Physique à l'Université d'Helsingfors. — **De l'influence de l'Electricité sur la végétation. Accroissement des récoltes.** Traduit avec la collaboration de l'auteur par Paul van Bierylliet, Ingénieur agricole. Grand in-8 (25 × 16) de 47 pages avec figures; 1902. 2 fr.

†**LODGE** (Sir Oliver), F. R. S. — **Sur les électrons**, Conférence faite à l'Institution of Electrical Engineers le 5 novembre 1902, traduite de l'anglais par *E. Vugues* et *J. Peridier*, Ingénieurs des Arts et Manufactures, avec Préface de P. Langevin, Professeur suppléant au Collège de France. In-16 (19 × 12) de XIII-168 pages, avec 7 figures; 1906..... 2 fr. 75 c.

†**LODGE** (O.), Professeur à l'University College de Liverpool. — **Les théories modernes de l'Électricité.** *Essai d'une théorie nouvelle.* Traduit de l'anglais et annoté par *E. Meylan*, Ingénieur civil. In-8, avec 53 figures; 1891.. 5 fr.

†**MARCHIS** (L.), Professeur adjoint de Physique à la Faculté des Sciences de Bordeaux, Lauréat de l'Institut (prix Plumey). — **Thermodynamique** (*Bibliothèque de l'Élève Ingénieur. Section de Physique industrielle*). 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : *Notions fondamentales*, avec une Préface de M. P. Duhem, Correspondant de l'Institut de France. Volume de IV-176 pages, avec 15 figures; 1904. 5 fr.

Tome II : *Introduction à l'étude des machines thermiques.* Volume de III-255 pages, avec 20 figures; 1905..... 5 fr.

MARX (A.), Inspecteur général des Ponts et Chaussées, en retraite, Officier de la Legion d'honneur. — **L'éther principe universel des forces.** Résumé par C. Benoit, Licencié ès sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique. Volume grand in-8 (25 × 16) de X-217 pages avec figures; 1905.. 6 fr. 50 c.

†**MASCART** (E.), Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau Central météorologique. — **Traité d'Optique.** 3 beaux volumes grand in-8 avec Atlas, se vendant séparément :

Tome I : *Systèmes optiques. Interférences. Vibrations. Diffraction. Polarisation. Double réfraction.* Avec 199 figures et 2 planches; 1889..... 20 fr.

Tome II et Atlas : *Propriété des cristaux. Polarisation rotatoire. Réflexion vitrée. Réflexion métallique. Réflexion cristalline. Polarisation chromatique.* Avec 113 figures et Atlas contenant 2 belles planches sur cuivre dont une en couleur (Propriétés des cristaux. Coloration des cristaux par les interférences); 1891..... 25 fr.

Tome III : *Polarisation par diffraction. Propagation de la lumière. Photométrie. Réfractions astronomiques.* Avec 83 figures; 1893..... 20 fr.

†**MASCART** (E.), Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau Central météorologique. — **Traité de Magnétisme terrestre.** Grand in-8, avec 94 figures; 1900..... 15 fr.

†MATHIAS (E.), Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Le point critique des corps purs.** In-8 de VIII-255 pages, avec 14 figures; 1904..... 7 fr.

†MATHIEU (Émile), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Traité de Physique mathématique**, comprenant les volumes suivants, qui se vendent séparément :

I. **Cours de Physique mathématique**, ou **Introduction à la Physique mathématique ; Méthodes d'intégration.** In-4; 1873..... 15 fr.

II. **Théorie de la capillarité.** In-4; 1883..... 10 fr.

III-IV. **Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme :**

I^re^ Partie : *Théorie du Potentiel.* In-4; 1885..... 9 fr.

II^e^ Partie : *Électrostatique et Magnétisme.* In-4; 1886..... 12 fr.

V. **Théorie de l'Électrodynamique.** In-4; 1888..... 15 fr.

VI-VII. **Théorie de l'Élasticité des corps solides.**

I^re^ Partie : *Considérations générales sur l'Élasticité. — Emploi des coordonnées curvilignes. Problèmes relatifs à l'équilibre d'élasticité. — Plaques vibrantes.* In-4; 1890..... 11 fr.

II^e^ Partie : *Mouvements vibratoires des corps solides. — Équilibre d'élasticité des lames courbes et du prisme rectangle.* In-4; 1890..... 9 fr.

†MAXWELL (James Clerk), Professeur de Physique expérimentale à l'Université de Cambridge. — **Traité de l'Électricité et du Magnétisme.** Traduit de l'anglais, sur la 2^e^ édition, par M. Seligmann-Lui, ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes, avec *Notes et Éclaircissements* par MM. Cornu, membre de l'Institut, et Potier, Professeurs à l'École Polytechnique, et suivi d'un *Appendice sur la Théorie des quaternions*, par M. E. Sarrau, membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. Deux forts volumes grand in-8, avec 122 figures et 20 planches; 1885-1889..... 30 fr.

Chaque volume se vend séparément..... 15 fr.

†MAXWELL (James Clerk). — **Traité élémentaire d'Électricité**, précédé d'une *Notice sur ses travaux en Électricité*, par *William Garnett*. Traduit de l'anglais par Gustave Richard, Ingénieur civil des Mines. In-8, avec figures; 1884.. 7 fr.

†METZ (G. de). — **La double réfraction accidentelle dans les liquides.** In-8 écu (20 × 13) de 104 pages, avec 32 figures; 1906 cartonné (*C. S.*).... 2 fr.

MOTTEZ (Lucien), Capitaine de frégate. — **La matière, l'éther et les forces physiques** Grand in-8 (25 × 16) de 236 pages, avec 82 figures; 1904. 4 fr.

†MOUTIER (J.), Examinateur à l'École Polytechnique. — **La Thermodynamique et ses principales applications.** 2^e^ éd. In-8, avec 96 fig.; 1885. 12 fr.

†NÉCULCÉA (E.). — **Le phénomène de Kerr et les phénomènes électro-optiques.** In-8 écu (20 × 13) de X-91 pages, avec 14 figures, cartonné (*C. S.*); 1902..... 2 fr.

†PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'électricité** (Cours de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : *Électrostatique, Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Volume de IV-329 pages, avec 145 figures; 1901..... 10 fr.

Tome II : *Électrodynamique. Magnétisme. Induction. Mesures magnéto-électriques.* Volume de 554 pages avec 221 figures; 1903..... 18 fr.

Tome III : *Électrolyse, Électrocapillarité, etc*..... (*En préparation.*)

†PETROVITCH (M.), Professeur à l'Université de Belgrade. — **La Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies.** In-8 écu (20 × 13) de 95 pages; cartonné (*C. S.*); 1906..... 2 fr.

†**POINCARÉ** (H.), Membre de l'Institut. — **Électricité et Optique.** La lumière et les théories électrodynamiques, leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. 2e édition revue et complétée par J. BLONDIN, Agrégé de l'Université, et EUGÈNE NECULCÉA, Licencié ès sciences. Gr. in-8 (25 × 16) de x-671 p., avec 62 figures; 1901..... 22 fr.

— **Figures d'équilibre d'une masse fluide.** Leçons professées à la Sorbonne en 1900, rédigées par L. DREYFUS, ancien Élève de l'École normale supérieure. Grand in-8 (25 × 16) de 210 pages avec 36 figures; 1902..... 7 fr.

— **Cours de Mécanique physique,** professé à la Faculté des Sciences de Paris. **Cinématique et mécanismes. Potentiel et mécanique des fluides.** Cours professé à la Sorbonne, rédigé par A. GUILLET. Grand in-8 (25 × 16) de 385 pages, avec 279 figures; 1899..... 15 fr.

— **La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil.** 2e édition. In-8 écu (20 × 13) de 100 pages, avec 5 figures, cartonné (*C.S.*); 1903..... 2 fr.

†**RESAL** (H.). — **Traité de Physique mathématique.** 2e édition, augmentée et entièrement refondue. Deux beaux volumes in-4 se vendant séparement :

TOME I : *Capillarité. Elasticité. Lumière;* 1887..... 15 fr.

TOME II : *Chaleur. Thermodynamique. Electrostatique. Courants électriques. Electrodynamique. Magnétisme statique. Mouvement des aimants et des courants;* 1888..... 12 fr.

†**RAOULT** (F.-M.), Doyen de la Faculté des Sciences de Grenoble. — **La Cryoscopie.** In-8 écu (20 × 13) de 106 pages, avec 8 figures, cartonné (*C.S.*); 1901..... 2 fr.

†**RODET** et **BUSQUET**, Ingénieurs des Arts et Manufactures. — **Les Courants polyphasés.** Grand in-8, avec 71 figures; 1893..... 3 fr. 50 c.

†**SARRAU** (Émile). — **Théorie des explosifs.** Grand in-8, avec figures; 1895. 2 fr. 50 c.

†**SARRAU et VIEILLE.** — **Étude sur l'emploi des manomètres à écrasement** pour la mesure des pressions développées par les substances explosives. Grand in-8; 1883..... 2 fr.

SCHAFFERS (V.), Docteur ès Sciences physiques et mathématiques, Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus, à Louvain. — **Essai sur la théorie des machines électriques à influence.** Grand in-8, avec 37 figures; 1898. 3 fr.

†**SERPIERI** (Alessandro). — **Traité élémentaire des mesures absolues, mécaniques, électrostatiques et électromagnétiques,** *avec applications à de nombreux problèmes.* Traduit de l'italien et annoté par *Paul Marcillac.* In-8; 1886..... 3 fr. 50 c.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE. — Collection de Mémoires sur la Physique, publiés par la Société française de Physique.

TOME I : *Mémoires de Coulomb* (publiés par les soins de *A. Potier*). Un beau volume grand in-8, avec figures et planches; 1884..... 12 fr.

TOME II : *Mémoires sur l'Electrodynamique*, Ire Partie (publiés par les soins de *J. Joubert*). Grand in-8, avec figures et planches; 1885..... 12 fr.

TOME III : *Mémoires sur l'Electrodynamique*, IIe Partie (publiés par les soins de *J. Joubert*). Grand in-8; 1887..... 12 fr.

TOME IV : *Mémoires sur le pendule, précédés d'une Introduction historique et d'une Bibliographie* (publiés par les soins de *C. Wolf*). Ce volume contient des Mémoires de *La Condamine, Borda et Cassini, de Prony, Henry Kater, F.-W. Bessel.* Grand in-8, avec figures et 7 planches; 1889..... 12 fr.

TOME V : *Mémoires sur le pendule et la détermination de la pesanteur.* (publiés par les soins de *C. Wolf.*) Ce volume contient des Mémoires de *F.-W. Bessel, Sabine, Baily, Stokes.* Grand in-8, avec figures et 1 planche; 1891..... 12 fr.

†**SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.** — Collection de Mémoires relatifs à la Physique. 2e série. (Voir *Abraham et Langevin*, p. 36.)

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE. — Recueil de données numériques de la Physique.

Optique, par M. H. DUFET.

Ier FASCICULE : *Longueurs d'onde. Indices des gaz et des liquides.* Grand in-8; 1898..... 15 fr.

IIe FASCICULE : *Propriétés optiques des solides.* Grand in-8; 1899. 15 fr.

IIIe FASCICULE : *Pouvoirs rotatoires. Couleurs d'interférence. Supplément.* Grand in-8; 1900..... 15 fr.

SORET (Ch.), Professeur à l'Université de Genève. — **Eléments de Cristallographie physique.** In-8, avec 538 figures et 1 planche; 1893..... 15 fr.

†**TAIT (P.-G.).** — **Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la Physique.** Traduit de l'anglais sur la 3e édition, par *Krouchkoll*, Licencié ès Sciences physiques et mathématiques. Grand in-8, avec figures; 1887. 7 fr. 50 c.

†**THOMSON (J.-J.)**, D. Sc., F. R. S. — **Les décharges électriques dans les gaz.** Ouvrage traduit de l'anglais, avec des notes par LOUIS BARBILLION. Docteur ès Sciences. Préface par CH.-ED. GUILLAUME. Un volume in-8, avec 41 figures; 1900..... 5 fr.

†**THOMSON (Sir William)** [**Lord Kelvin**], L.L.D., F.R.S, F.R.S.E., etc., Professeur de Philosophie naturelle à l'Université de Glascow, Membre du Collège Saint-Pierre, à Cambridge. — **Constitution de la matière.** *Conférences scientifiques et allocutions.* Traduites et annotées sur la 2e édition, par M. P. LUGOL, Agrégé des Sciences physiques, Professeur au lycée de Pau; avec des *Extraits de Mémoires récents de* Sir W. THOMSON *et quelques Notes*, par M. BRILLOUIN, Maître de Conférences à l'Ecole Normale. In-8, avec 76 figures. 1893..... 7 fr. 50 c.

†**TISSOT (Camille)**, Lieutenant de vaisseau. — **Étude de la résonance des systèmes d'antennes dans la Télégraphie sans fil.** In-8 (23×14) de IV-204 pages, avec 49 figures; 1906..... 5 fr.

†**TYNDALL (J.).** — **La Chaleur,** *considérée comme mode de mouvement.* 2e édition française, traduite de l'anglais sur la 4e édition, par *l'Abbé Moigno.* In-18 jésus de XXXII-576 pages, avec 110 figures; 1887. Nouveau tirage. 8 fr.

†**WALLON (Étienne)**, ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur au lycée Janson-de-Sailly. — **Traité d'Optique géométrique** *à l'usage des Elèves de Mathématiques spéciales.* Grand in-8, avec 169 figures; 1897. 9 fr.

†**WYROUBOFF (G.).** — **Manuel pratique de Cristallographie.** *Détermination des formes cristallines.* In-8, avec figures et 6 planches en taille-douce; 1889..... 12 fr.

CHIMIE.

†**BERTHELOT (M.)**, Sénateur, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France. — **Thermochimie.** *Donnees et Lois numériques.*

TOME I : *Les lois numériques;* XVII-737 pages. — TOME II : *Les donnees expérimentales;* 878 p. 2 beaux volumes grand in-8; 1897..... 50 fr.

†**BERTHELOT** (M.), Membre de l'Institut, Président de la Commission des substances explosives. — **Sur la force des matières explosives, d'après la Thermochimie.** 3e édition. 2 beaux volumes gr. in-8 avec figures; 1883. 30 fr.

†**BERTHELOT** (M.). — **Leçons sur les méthodes générales de Synthèse en Chimie organique.** In-8; 1864..... 8 fr.

†**BERTHELOT** (M.). — **Traité pratique de l'Analyse des gaz.** Grand in-8 (25 × 16) de IX-483 pages avec 109 figures; 1906..... 17 fr.

†**CHEVREUL** (E.). — **Recherches chimiques sur les corps gras d'origine animale,** précédées d'un Avant-propos de A. Arnaud, aide-naturaliste au Muséum d'Histoire naturelle. Un beau volume grand in-4, avec une photogravure de la médaille de Chevreul, gravée par *Roty;* un fac-similé et une planche. 2e édition; 1889.

Broché..... 25 fr. | Cartonné..... 29 fr.

†**DÉCOMBE** (L.), Docteur ès Sciences. — **Compressibilité des gaz réels.** In-8 écu (20 × 13) de 100 pages, avec 15 figures, cartonné (*C. S.*); 1903. 2 fr.

†**DUHEM** (E.), Correspondant de l'Institut de France, Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Le Mixte et la Combinaison chimique,** essai sur l'évolution d'une idée. In-8 (23 × 14) de 216 p.; 1902..... 3 fr. 50 c.

†**DUMAS,** Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Leçons sur la Philosophie chimique,** professées au Collège de France en 1836, recueillies par *Bineau.* 2e édition. In-8; 1878..... 7 fr

FÉRY (Ch.), Chef des Travaux pratiques à l'Ecole de Physique et de Chimie industrielles. — **Rayonnement calorifique et lumineux de quelques oxydes.** Grand in-8 (25 × 16) de 116 pages, avec 24 fig.; 1902.. 3 fr. 50 c.

†**FORCRAND** (R. de), Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut de Chimie de l'Université de Montpellier. — **Cours de Chimie** *à l'usage des étudiants du P. C. N.* Deux volumes in-8 (23 × 14) se vendant séparément.

Tome I : *Généralités. Chimie minérale.* Volume de VI-325 pages, avec 16 fig.; 1905..... 5 fr.

Tome II : *Chimie organique. Chimie analytique.* Volume de IV-317 pages, avec 19 figures; 1905..... 5 fr.

†**FREUNDLER** (P.), Docteur ès Sciences, Chef des travaux pratiques à la Faculté des Sciences de Paris. — **La Stéréochimie.** In-8 écu (20 × 13) de 98 p. et 87 figures, cartonné (*C. S.*); 1899..... 2 fr.

†**GAUTIER** (Henri) et **CHARPY** (Georges), Docteurs ès Sciences, anciens Élèves de l'École Polytechnique. — **Leçons de Chimie,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales.* 4e édition, entièrement refondue, conforme au programme du 27 juillet 1904. Grand in-8, avec 96 figures; 1905.

Broché..... 10 fr. | Relié (cuir souple)..... 13 fr.

HALLER (A.), Membre de l'Institut. — **Les récents progrès de la Chimie.** Conférences faites au Laboratoire de Chimie organique de la Sorbonne, sous la direction de A. Haller.

Ire Série. In-8 de 321 pages; 1904..... (*Épuisé.*)

IIe Série. In-8 de 313 pages; 1906..... 5 fr.

†**HALLER** (A.), Directeur de l'Institut chimique de Nancy, et **MULLER** (P.-Th.), Maître de Conférences à l'Institut chimique de la Faculté des Sciences de Nancy. — **Traité élémentaire de Chimie** à l'usage des candidats au P. C. N. et aux baccalauréats scientifiques.

Chimie minérale. In-8 (23×14) de 336 pages, avec 50 figures, cartonné à l'anglaise; 1896..... 6 fr.

Chimie organique. 2e édition. In-8 (23×14) de 205 pages, avec 3 figures, cartonné à l'anglaise..... (*En préparation.*)

MILLER (W.-V.) et **KILIANI** (H.). — **Traité de Chimie analytique**, revue par H. Kiliani, Professeur à l'Université de Fribourg in B. 1re édition française, traduite avec autorisation de l'Auteur, sur la 5e édition allemande; par H. Defoin et E. von Winiwarter, Docteur ès Sciences, assistant à l'Université de Liège. In-8 (22×14) de XIV-661 pages, avec 96 figures et un Tableau d'Analyse spectrale; 1906, cartonné..... 15 fr.

†**MIQUEL** (P.), Docteur ès Sciences, Docteur en médecine, Chef du service micrographique à l'Observatoire municipal de Montsouris. — **Les Organismes vivants de l'atmosphère.** Étude sur les semences aériennes des moisissures et des bactéries, sur les procédés usités pour récolter, compter et cultiver ces deux classes de microbes et sur l'application de ces recherches à l'hygiène générale des villes et des asiles hospitaliers. Un beau volume in-4, avec 86 figures et 2 planches en taille-douce; 1883..... 12 fr.

†**MIQUEL.** — **Manuel pratique d'Analyse bactériologique des eaux.** In-18 jésus, avec figures; 1891..... 2 fr. 75 c.

†**MONOD** (E.-G.). — **Stéréochimie.** Exposé des théories de Le Bel et Van't Hoff, complétées par les travaux de MM. Fischer, Baeyer, Guye et Friedel; avec une *Préface* de M. Friedel. In-8 avec nombreuses figures; 1895.. 5 fr.

†**MOREL** (Marie-Auguste), Ingénieur, ancien Élève de l'École des Ponts et Chaussées. — **Considérations nouvelles sur les appareils producteurs de gaz acétylène.**

I. *Appareils destinés aux installations isolées de petite et de moyenne importance.* (Extrait des Comptes rendus *in extenso* des travaux du IIIe Congrès international de l'acétylène tenu à Paris en 1900.) In-8 (25×16) de 64 pages; 1901..... (*Épuisé.*)

II. *Appareils destinés aux installations centrales de grande importance.* (Extrait de l'*Acétylène. Théorie et applications*, ouvrage du même auteur.) In-8 (25×16) de 22 pages avec 1 figure; 1903..... 1 fr.

†**MOUREU** (Ch.), Professeur agrégé à l'École de Pharmacie de l'Université de Paris. — **Notions fondamentales de Chimie organique.** 2e édition, revue et augmentée. In-8 de VI-320 pages; 1906.

Broché..... 7 fr. 50 c. | Cartonné..... 8 fr. 50 c.

†**OSTWALD** (Dr W.). — **Eléments de Chimie inorganique**, traduits de l'allemand par L. Lazard. 2 volumes grand in-8 (25×16) se vendant séparément.

Ire Partie : *Métalloïdes.* Volume de IX-542 p., avec 150 fig.; 1904... 15 fr.
IIe Partie : *Métaux.* Volume de IV-450 pages, avec 17 figures; 1905. 15 fr.

†**PERRIN** (Jean). Chargé du Cours de Chimie physique à la Faculté des Sciences de Paris. — **Traité de Chimie physique. Les Principes.** Grand in-8 (25×16) de XXVI-300 pages avec 38 figures; 1903.

Broché..... 10 fr. | Relié cuir souple..... 13 fr.

†**ROBIN** (G.). — **Œuvres scientifiques.** (Voir p. 16.)

†**TRILLAT** (J.-A.), Directeur du Service d'analyse à l'Institut Pasteur. — **Oxydation des alcools par l'action de contact.** In-8 (23×14) de 208 pages, avec 5 figures; 1901..... 5 fr.

OUVRAGES DIVERS.

†**ANGLAS** (J.) Docteur ès sciences. — **Les Phénomènes des Métamorphoses internes.** In-8 écu (20 × 13) de 90 p., avec 16 fig., cart. (*C. S.*); 1902 2 fr.

†**ARTHUS** (M.), Professeur à l'Université de Fribourg. — **La coagulation du sang.** In-8 écu (20 × 13) de 94 pages, cartonné. (*C. S.*); 1900..... 2 fr.

BERTHELOT. — **Cinquantenaire scientifique de M. Berthelot** (1851-1901). — Compte rendu de la cérémonie du 24 novembre 1901. Un beau volume in-4, avec 24 planches; 1902..... 20 fr.

†**COMBEROUSSE** (Ch. de), Ingénieur civil, Professeur de Mécanique à l'École Centrale, ancien Élève et Membre du Conseil de l'École. — **Histoire de l'École Centrale des Arts et Manufactures, depuis sa fondation jusqu'à ce jour.** Grand in-8, orné de 4 planches sur chine; 1879..... 5 fr.

†**COUTURAT** (Louis). — **L'Algèbre de la Logique.** (*Collection Scientia*); In-8 écu (20 × 13) de 100 p., cartonné; 1905..... 2 fr.

†**ÉCOLE POLYTECHNIQUE.** — **Livre du Centenaire, 1794-1894.** Trois beaux volumes grand in-8 avec nombreuses gravures et planches, se vendant ensemble..... 50 fr.

On vend séparément :

Tome I : *L'Ecole et la Science.* Volume de LXV-572 pages avec 18 planches; 1895..... 18 fr.

Tome III : *Services civils et carrières diverses.* Volume de 646 pages avec 21 planches; 1897..... 18 fr.

Le Tome II : *Services militaires.* Volume de 568 pages avec 14 planches; 1899, ne se vend pas séparément.

†**GÉRARD** (A.), Sous-Contrôleur dans l'Administration des accises de Belgique, — **Manuel complet et pratique du cubage des bois,** à l'usage des Négociants en bois, Constructeurs de navires, Entrepreneurs, Agents forestiers, Employés des douanes, de l'octroi, Charpentiers, Menuisiers, Ébénistes, etc., comprenant des exemples sur toutes les méthodes de mesurage, et de nombreuses applications sur le mécanisme des Tables et Tarifs. 2e édition. Petit in-8 de 151 pages dont 71 de Tables; 1884..... 3 fr. 50 c.

†**GUILLAUME** (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La Convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4, avec nombreuses figures; 1902..... 7 fr. 50 c.

HIRN (G.-A.). — **Sa vie, sa famille, ses travaux;** par le Dr Fauvel et E. Schwoerer. In-8, avec un portrait et un autographe de *G.-A. Hirn* et 3 planches, 1893..... 5 fr.

***LEAU** (L.), Agrégé et Docteur ès Sciences, membre du Congrès international des Mathématiciens. — **Une langue universelle est-elle possible ?** *Exposé des moyens pour faire le choix et assurer le succès à une langue scientifique commerciale et universelle. Appel aux hommes de science et aux commerçants.* Brochure de 13 pages in-18 jésus; 1900..... 1 fr.

†**LECHALAS** (Georges), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Introduction à la Géométrie générale.** In-16 (19 × 12) de IX-65 pages avec 5 figures; 1904..... 1 fr. 75 c.

MOUCHOT, Professeur au Lycée de Tours. — **La réforme cartésienne étendue aux diverses branches des Mathématiques.** Grand in-8; 1876..... 5 fr.

MULLER (Félix). — **Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français,** contenant les termes techniques employés dans les Mathématiques pures et appliquées.

TOME I : *Français-Allemand.* Petit in-4 de XII-132 pages; 1900. 10 fr.
TOME II : *Allemand-Français.* Petit in-4 de VI-184 pages; 1901. 13 fr. 75 c.

PASTEUR (L.), Membre de l'Institut. — **Études sur la maladie des vers à soie.** *moyen pratique assuré de la combattre et d'en prévenir le retour.* 2 beaux volumes grand in-8, avec figures et 37 planches; 1870. (*Rare.*)..... 35 fr.

PASTEUR (Jubilé de M.) (1822-1892). — **Compte rendu de la cérémonie du 27 décembre 1892.** *Discours. Adresses. Télégrammes.* In-4, avec 5 planches, titre en 2 couleurs; 1893. (Se vend au profit de la Société des Amis des Sciences.)..... 10 fr.

PASTEUR (1822-1895). — **Notice biographique;** par M. C. CHAPPUIS, Recteur honoraire de l'Académie de Dijon. In-8; 1896..... 75 c.

RICHARD (Jules), Docteur ès sciences mathématiques, Professeur au Lycée de Dijon. — **Sur la philosophie des mathématiques.** In-18 jésus de 248 pages; 1903..... 3 fr. 25 c.

†**SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri).** — **Sa vie et ses travaux,** par *Jules Gay,* Docteur ès Sciences, ancien Elève de l'Ecole Normale supérieure, Professeur au Lycée Louis-le-Grand. Petit in-8, avec un portrait hors texte de Henri et Charles Sainte-Claire Deville; 1889..... 2 fr. 50 c.

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

(*Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.*)

†**ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques,** publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par un *Comité de rédaction composé des Professeurs de Mathématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté.* II^e^ Série. In-4, trimestriel.

Ces **Annales**, fondées en 1887, forment par an un beau volume in-4, avec figures, de 50 feuilles environ.

Prix pour un an (4 fascicules) :
Paris, 25 fr. — Départements et Union postale, 28 fr.

I^re^ Série, 12 volumes in-4 (1887-1898) se vendant ensemble..... 240 fr.
Chacun des Tomes I à XII (1887-1898) séparément..... 20 fr.

II^e^ Série, Tomes I à VI (1899-1906). Chaque année..... 25 fr.

†**ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS. Météorologie. Chimie. Micrographie. Applications à l'hygiène,** publiées sous la direction des Chefs de Service.

Ces ANNALES, publiées sous la direction des Chefs de Service, paraissent régulièrement chaque trimestre par fascicule de 6 feuilles grand in-8, avec figures et planches.

Ces *Annales* sont destinées à remplacer l'*Annuaire de l'Observatoire de Montsouris* qui donne, depuis 1876, le résumé des observations faites par les savants attachés à cet Observatoire. L'exiguïté du format ne permettait pas d'insérer les planches nécessaires et, d'autre part, le développement des services rendait indispensable la création d'un Recueil qui permette l'insertion de Mémoires originaux.

Ces Mémoires donneront à ces nouvelles *Annales* un caractère plus général que l'ancien *Annuaire*, et nous ne doutons pas qu'il soit bien accueilli par le public savant auquel il s'adresse.

Prix pour un an (4 fascicules) :

Paris ..... 15 fr.
Départements et Union postale ..... 17 fr.
Les Tomes I à VI (1900 à 1905) se vendent chacun ..... 15 fr.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, publiées par les *Facultés de Droit, des Sciences et des Lettres* et par l'*École de Médecine*. Grand in-8.

Ces *Annales*, fondées en 1889, comprennent annuellement 3 numéros de 16 à 18 feuilles chacun, paraissant le 1er mars, le 1er juin et le 1er décembre. Chaque numéro contient une Partie réservée au Droit, aux Sciences, aux Lettres, ainsi qu'à la Chimie, aux Sciences naturelles et à la Médecine.

Prix de l'abonnement (3 numéros) :

France ..... 12 fr. | Étranger ..... 15 fr.

Par exception, l'année 1889 ne comprend que les numéros du 1er juin et du 1er décembre; le prix de cette année est réduit à 8 fr.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON. Fascicules grand in-8° paraissant à époques irrégulières.

Les fascicules annoncés par la librairie Gauthier-Villars sont relatifs aux Sciences mathématiques, physiques et chimiques.

Autonne (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Docteur ès Sciences mathématiques, Chargé de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon. — *Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré;* 1892 ..... 9 fr.

Gonnessiat (F.), Aide-astronome à l'observatoire de Lyon. — *Recherches sur l'equation personnelle dans les observations astronomiques de passage;* 1892. 5 fr.

Barral (Étienne), Docteur en médecine, Pharmacien de 1re classe, Chargé des fonctions d'Agrégé à la Faculté de Médecine de Lyon. — *Recherches sur quelques dérivés surchlorés du phénol et du benzène;* 1895 ..... 5 fr.

Autonne (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, Lauréat de l'Institut. — *Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surface algébrique;* 1896... 3 fr.

Rigollot (H.), Chef des travaux de Physique à la Faculté des Sciences de Lyon. — *Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électrochimiques;* 1897. 5 fr.

Houllevigue (M.-L.), Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lyon. — *Sur le résidu électrique des condensateurs;* 1897 ..... 3 fr

Rousset (L.), Chef des travaux de Chimie à la Faculté des Sciences de Lyon. — *Synthèses d'aldéhydes et d'acétones dans la série du naphtalène au moyen du chlorure d'aluminium;* 1897 ..... 3 fr.

Causse (X.), Docteur ès sciences, Chef des Travaux de Chimie organique à la Faculté de Médecine de l'Université de Lyon. — *De la Constitution des alcaloïdes végétaux.* Grand in-8; 1899..... 3 fr.

Lagrula (Joanny). Docteur ès sciences, Préparateur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Lyon, Assistant à l'Observatoire. — *Études sur les occultations d'amas d'étoiles par la Lune,* avec un *Catalogue normal des Pléiades.* Grand in-8 de 152 pages, avec 5 figures; 1901..... 5 fr.

Autonne (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Maître de Conférences de mathématiques à l'Université de Lyon. — *Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale en un produit d'inversions.* Grand in-8 de 125 pages; 1903..... 6 fr.

Le Vavasseur, Maître de Conférences de mathématiques à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Quelques considérations sur les groupes d'ordre fini et les groupes finis continus.** Grand in-8; 1904..... 5 fr.

Autonne (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. — *Sur les formes mixtes.* Grand in-8 (25 × 16) de 195 pages avec figures; 1905... 8 fr.

Chanoz (A.-M.), Docteur ès sciences physiques, Docteur en médecine. — **Recherches expérimentales sur les contacts liquides.** Grand in-8 (25 × 16) de 101 pages, avec figures; 1906..... 5 fr.

†**ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par un *Comité de Rédaction composé des Maîtres de Conférences.* In-4, mensuel, avec figures dans le texte.

I^re^ **Série.** 7 volumes; années 1864 à 1870..... **150 fr.**

II^e^ **Série.** 12 volumes; années 1872 à 1883..... **250 fr.**

III^e^ **Série**, les 10 volumes formant les années 1884 à 1893 se vendent ensemble..... **200 fr.**

Les 10 volumes formant les années 1894 à 1903 se vendent ensemble. 200 fr.

Table des Matières et noms d'auteurs contenus dans les 2 premières séries. In-4; 1887..... 2 fr.

Table des Matières et noms d'auteurs contenus dans les dix premiers volumes de la troisième Série (1884-1893). In-4; 1894..... 1 fr.

On peut se procurer l'une des deux Séries au moyen de payements mensuels de **20** fr.

La **III^e^ Série**, commencée en 1884, paraît chaque mois, par numéro contenant 4 à 5 feuilles in-4, avec figures dans le texte et planches.

On vend séparément :

Chacune des années 1864 à 1870, 1872 à 1903..... 25 fr.
Chaque année suivante..... 30 fr.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris, **30** fr. — Départements et Union postale, **35** fr. — Autres pays, **40** fr.

†**BIBLIOGRAPHIE SCIENTIFIQUE FRANÇAISE.** — Recueil mensuel publié sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par le Bureau français du Catalogue international de la littérature scientifique.

I^re^ Section. *Sciences mathématiques et physiques;*

Paris..... 5 fr. 50 c.
Départements et Union postale..... 6 fr. 50 c.

II^e^ Section. *Sciences biologiques naturelles;*

Paris..... 9 fr. 50 c.
Départements et Union postale..... 10 fr. 50 c.

Le numéro double 1-2, *qui contient la liste des périodiques avec leurs abréviations et la classification scientifique, se vend séparément*..... 2 fr. 50 c.

†**BULLETIN ASTRONOMIQUE**, publié par l'Observatoire de Paris (Commission de rédaction : *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, président, *G. Bigourdan*, *H. Deslandres*, *P. Puiseux* et *R. Radau*). Grand in-8, mensuel.

Ce Bulletin mensuel, fondé en 1884, forme par an un beau volume grand in-8, avec figures et planches, de 30 à 35 feuilles.

Les Tomes I à X (1884-1893) se vendent ensemble ..... 110 fr.
Les Tomes XI à XX (1894-1903) se vendent ensemble..... 110 fr.
Chacun des Tomes I à XX (1884-1903) [à l'exception du Tome XVI, 1899], séparément..... 14 fr.
Chaque année à partir du Tome XXI (1904) se vend séparément. 16 fr.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris, 16 fr. — Départements et Union postale, 18 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE et REVUE MENSUELLE D'ASTRONOMIE, DE MÉTÉOROLOGIE ET DE PHYSIQUE DU GLOBE, publié sous la Direction d'un Comité de Rédaction. (Rédacteur en chef : M. C. Flammarion; Membres : MM. Fouché, Deslandres et Ch.-Ed. Guillaume.) Grand in-8, avec figures.

Ce Bulletin paraît chaque mois en livraison de 2 feuilles environ.

Prix de l'abonnement annuel pour tous pays.... 10 fr.
Chaque numéro se vend séparément..... 1 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES ÉLECTRICIENS.

Ce Bulletin, fondé en 1884, paraît chaque année, en dix numéros, formant un beau volume de 30 feuilles environ, grand in-8 jésus.

I^re^ Série. Tomes I à XVII (années 1884 à 1900). Chaque volume se vend séparément..... 25 fr.
II^e^ Série. Tomes I à IV (années 1901 à 1905). Chaque volume..... 25 fr.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an :

Paris..... 25 fr.
Départements et Union postale..... 28 fr.
Prix du numéro..... 2 fr. 50 c.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, publié par les Secrétaires. Grand in-8.

Ce *Bulletin*, fondé en 1873, paraît tous les trois mois, il forme chaque année un volume de 18 feuilles environ grand in-8.

Prix pour un an :

Paris, 15 fr. — Dép. et Union postale, 16 fr.

Table des vingt premiers volumes. Grand in-8; 1894..... 1 fr. 75 c.
Table des Tomes XXI *à* XXV (1893 à 1902). Grand in-8; 1904..... 1 fr.

†**BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,** rédigé par Gaston Darboux, Émile Picard et Jules Tannery, avec la collaboration de *Brocard, Goursat, G. Kœnigs, Laisant, Lampe, Mansion, Molk, Radau, Raffy, S. Rindi. Sauvage, Schoute, Zeuthen*, etc., sous la direction de la Commission des Hautes Études. (Président : *Darboux;* Membres : *H. Poincaré, J. Tannery, E. Picard, P. Appell;* Secrétaire : *Guillet.*)

Ce Bulletin mensuel, fondé en 1870, a formé par an, jusqu'en 1872, un volume de 25 à 26 feuilles grand in-8 (Tomes I, II, III). — A partir de cette époque, un accroissement considérable lui a été donné, sans augmentation de prix, et ce Journal a formé, depuis janvier 1873 jusqu'en décembre 1876, 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables) comprenant en tout 42 à 43 feuilles grand in-8.

La I^re^ Série, Tomes I à XI, 1870 à 1876, *se vend*..... 90 fr.
Chaque année de cette I^re^ Série se vend séparément..... 15 fr.
Table générale des matières et noms d'auteurs contenus dans la 1^re^ *série.* Grand in-8; 1887..... 1 fr. 50 c.

La II^e Série, qui a commencé en janvier 1877, forme chaque année un Ouvrage de 48 feuilles environ, qui comprend deux Parties ayant une pagination spéciale et pouvant se relier séparément. La première Partie contient : 1° *Comptes rendus de Livres et Analyses de Mémoires ; 2° Mélanges scientifiques, Traductions de Mémoires importants et peu répandus, et Réimpression d'Ouvrages rares.* La deuxième Partie contient : *Revue des Publications périodiques ou académiques.*

Les 10 premières années de la II^e Série (1877 à 1886) se vendent ensemble 120 fr.
Les 10 années suivantes (1887 à 1896) se vendent ensemble ..... 120 fr.
Chacune des 20 premières années de la II^e Série (1877 à 1896) se vend séparément ..... 15 fr.
Chaque année suivante ..... 18 fr.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :
Paris, 18 fr. — Départements et Union postale, 20 fr.

†**BULLETIN MENSUEL DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE**, publié par A. ANGOT, Directeur du Bureau central météorologique. In-4, mensuel.

Prix pour un an :
Paris, 5 fr. — Départements et Union postale, 6 fr.
Les années 1895 à 1906 se vendent séparément ..... 5 fr.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. In-4; hebdomadaire.

Les **Comptes rendus** paraissent régulièrement tous les dimanches, en un cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120.

Prix pour un an :
Paris, 30 fr. — Départements, 40 fr. — Union postale, 44 fr.
La *Collection complète*, de 1835 à 1906, forme 143 vol. in-4 ..... 1790 fr.
Chaque année, sauf 1845, 1878 à 1892, 1896 à 1898 *se vend séparément*. 25 fr.
Chaque volume, sauf les Tomes 20, 21, 76 à 108, 110, 112, 114, 115, 122 à 127, se vend séparément ..... 15 fr.

Table générale des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, par ordre de matières et par ordre alphabétique de noms d'auteurs.

Tables des Tomes I à XXXI (1835-1850). In-4; 1853 ..... 25 fr.
Tables des Tomes XXXII à LXI (1851-1865). In-4; 1870 ..... 25 fr.
Tables des Tomes LXII à XCI (1866-1880). In-4; 1888 ..... 25 fr.
Tables des Tomes XCII à CXXI (1881-1895). In-4; 1900 ..... 25 fr.

— **Supplément aux Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.** Tomes I et II, 1856 et 1861, séparément ..... 25 fr.

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (L'). — Revue internationale, paraissant tous les deux mois depuis janvier 1899, par fascicules de 80 pages in-8 raisin (25 × 16), sous la direction de MM. **C.-A. Laisant** et **H. Fehr**, avec la collaboration de M. **Buhl** et sous les auspices d'un Comité de patronage.

Abonnement : Union postale ..... 15 fr.
Prix du numéro ..... 3 fr.
La collection des huit premiers volumes (1899 à 1906) ..... 96 fr.
Les Tomes I, III à VIII sont en vente séparément au prix de ..... 15 fr.

***INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L')**, dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et *A. Grévy*, Professeur au Lycée Saint-Louis (publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique).

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :
Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50 c.

Les Tomes I à XIII (1894-1906) se vendent ensemble..... 91 fr.
Les Tomes II à XIII se vendent séparément..... 7 fr.
Le Tome I (1894) ne se vend pas séparément.

JOURNAL DE CHIMIE PHYSIQUE. Electrochimie. Thermochimie, Radiochimie, Mécanique chimique, Stoechiométrie, publié par PHILIPPE-A. GUYE, Professeur de Chimie à l'Université de Genève, avec la collaboration d'un grand nombre de savants (Secrétaire de la Direction : G. DARIER, Docteur ès Sciences). Grand in-8.

Cette publication périodique paraît en 8 ou 10 numéros formant un volume annuel de 600 à 700 pages.

Prix de l'abonnement pour toute l'Union postale .. .. 25 fr.
Les volumes parus se vendent chacun..... 30 fr.

†**JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement (*voir* p. 21).

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, gegründet von A.-L. Crelle (1826). Herausgegeben von *L. Fuchs*. In-4.

Prix de l'abonnement pour Paris (4 numéros)..... 20 fr.
Table des Tomes 1 à 100 (1826-1887). In-4..... 15 fr.
Une collection des Tomes 1 à 123 est à vendre.

†**JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par *Liouville;* puis de 1875 à 1884 par *Resal.*

Depuis 1885, le *Journal de Mathématiques* est publié par CAMILLE JORDAN, Membre de l'Institut, avec la collaboration de *M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré.* In-4, trimestriel.

I^re^ Série. 20 volumes in-4, années 1836 à 1855 (au lieu de 600 fr.) **400 fr.**
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)..... **25 fr.**

II^e^ Série, 19 volumes in-4, années 1856 à 1874 (au lieu de 570 fr.). **380 fr.**
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)..... **25 fr.**

III^e^ Série, 10 volumes in-4, années 1875 à 1884 (au lieu de 300 fr.) **200 fr.**
Chaque volume (sauf l'année 1879) pris séparément, au lieu de 30 fr. **25 fr.**

IV^e^ Série, 10 volumes in-4, années 1885 à 1894 (au lieu de 300 fr.) **200 fr.**
Chaque volume pris séparément, au lieu de 30 fr..... **25 fr.**

V^e^ Série, 10 volumes in-8, années 1895 à 1904 (au lieu de 300 fr.). **200 fr.**
Chaque volume pris séparément, au lieu de 30 fr..... **25 fr.**

On peut se procurer l'une des quatre Séries au moyen de payements mensuels de **40 fr.**

— **Table générale des 20 volumes** composant la I^re^ Série. In-4. **3 fr. 50 c.**
— **Table générale des 19 volumes** composant la II^e^ Série. In-4. **3 fr. 50 c.**
— **Table générale des 10 volumes** composant la III^e^ Série. In-4. **1 fr. 75 c.**
— **Table générale des 10 volumes** composant la IV^e^ Série, suivie d'une Table par noms d'auteurs (années 1885 à 1894) et d'une *Table générale des noms d'auteurs des volumes des quatre Séries* (1836-1894). In-4. **1 fr. 75 c.**

La VI^e^ Série, commencée en 1905, se publie, chaque année, en 4 fascicules de 12 à 15 feuilles, paraissant au commencement de chaque trimestre.

Prix pour un an (4 FASCICULES) :
Paris, 30 fr. — Départements et Union postale, 35 fr.

JOURNAL DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, fondé par *d'Almeida* et publié par *E. Bouty*, *Lippmann*, *E. Mascart*, *L. Poincaré* et *B. Brunhes*, *M. Lamotte* et *G. Sagnac*, adjoints à la rédaction, avec la collaboration d'un grand nombre de professeurs et de physiciens. Grand in-8, mensuel.

I^re^ Série. 10 volumes in-8, années 1872 à 1881 ..... (*Rare.*)
Chaque volume (sauf le Tome II, 1873) se vend séparément .. .. 20 fr.

II^e^ Série. 10 volumes in-8, années 1882 à 1891..... 150 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 15 fr.

III^e^ Série. 10 volumes in-8, années 1892 à 1901..... 150 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 15 fr.

La IV^e^ Série, commencée en 1902, continue à paraître chaque mois et forme par an un volume grand in-8 de 36 feuilles, avec figures.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris et Départements ..... 17 fr.
Union postale..... 18 fr.

— **Table analytique et Table par noms d'auteurs des trois premières séries (1872-1901)** dressées par MM. E. BOUTY et B. BRUNHES, avec la collaboration de MM. BÉNARD, CARRÉ, COUETTE, LAMOTTE, MARCHIS, MAURAIN, ROY et SANDOZ. Grand in-8..... 10 fr.

MATHÉSIS, *Recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales et des Établissements d'enseignement secondaire*, publié par *P. Mansion* et *J. Neuberg*. Gr. in-8, mensuel.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, France et Étranger..... 9 fr.

MONITEUR DE LA PHOTOGRAPHIE (LE). Revue internationale et universelle des progrès de la Photographie et des Arts qui s'y rattachent. (Fondé en 1861 par ERNEST LACAN et dirigé pendant 34 ans par LÉON VIDAL.) Directeur : CHARLES GRAVIER. 3^e^ Série. Grand in-8 illustré. Mensuel.

La 3^e^ Série (gr. in-8) paraît mensuellement depuis 1906.

Prix de l'abonnement (12 NUMÉROS) :

Paris et Départements..... 1 fr. 50 c.
Étranger ..... 3 fr.

†**NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des Candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation**, dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Professeur à Sainte-Barbe, Répétiteur à l'École Polytechnique, et *C. Bourlet*, Docteur ès Sciences, Professeur au Lycée Saint-Louis, et *Bricard*, Répétiteur à l'École Polytechnique. (Publication fondée en 1842 par *Gerono* et *Terquem*, et continuée par *Gerono*, *Prouhet*, *Bourget*, *Brisse*, *Rouché*, *Antomari* et *Duporcq*.) In-8, mensuel.

I^re^ Série, 20 vol. in-8, années 1842 à 1861..... 300 fr.
Les TOMES I à VII et XVI (1842-1848, 1857) ne se vendent pas séparément.
Les autres Tomes de la I^re^ Série se vendent séparément..... 15 fr.

II^e^ Série, 20 vol. in-8, années 1862 à 1881 ..... 300 fr.
Les TOMES I à III, V et XIX (1862 à 1864, 1866 et 1880) de la 2^e^ Série ne se vendent pas séparément. Les autres Tomes se vendent séparément..... 15 fr.

III^e^ Série, 19 vol. in-8, années 1882 à 1900..... 285 fr.
Chacun des Tomes I à XIX (1882 à 1900) de la 3^e^ série se vend séparément..... 15 fr.

On peut se procurer l'une des trois Séries au moyen de payements mensuels de 20 fr.

La IV^e^ Série, commencée en 1901, continue de paraître chaque mois par cahiers de 48 pages au moins.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, **15** fr. — Dép. et Union postale, **17** fr.

— **Tableau de Correspondance entre les Questions posées et leurs solutions,** *de l'année* 1842 (*fondation*) *à* 1900 *inclus*. In-8; 1901..... 0 fr. 50 c.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES. rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam, par P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman, avec la collaboration de plusieurs savants. Grand in-8, paraissant en 2 fascicules.

Prix pour un an :

Paris, Départements et Union postale : **8 fr. 50 c.**

(Port en plus : 0 fr. 60 c.)

Chacune des années antérieures, à partir de 1893, sauf 1895 (T. IV). 8 fr. 50 c.

(Port en plus : 0 fr. 60 c.)

Table des matières contenues dans les cinq volumes 1898-1902, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. Grand in-8; 1903..... 7 fr. 50 c.

Table des matières contenues dans les cinq volumes 1893-1897, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs. Grand in-8; 1897..... 5 fr.

(*Mars* 1907.)

39668 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Abel (H.-N.), 17.
Abraham, 36.
Abraham et Langevin, 36.
Adhémar, 17, 18.
Agrégation, 17.
Andoyer, 17.
Anglas, 48.
Annales de l'Observatoire de Meudon, 28.
Annales de l'Observatoire de Paris, 29.
Annales de l'Observatoire de Bordeaux, 29.
Annales de l'Observatoire de Toulouse, 29.
Annales de l'Observatoire de Nice, 29.
Annales du Bureau central météorologique, 29.
Annales du Bureau des Longitudes, 30.
Annales de l'Observatoire de Montsouris, 30, 49.
Annales de l'Université de Toulouse, 49.
Annales de l'Université de Grenoble, 50.
Annales de l'Université de Lyon, 50.
Annales de l'Ecole Normale, 51.
Appell, 17, 25, 26.
Appell et Chappuis, 26.
Appell et Goursat, 17.
Appell et Lacour, 18.
Arnoux, 3.
Arthus, 48.
Atlas lunaire belge, 30.
Atlas photographique de la Lune, 30.
Auerbach, 36.
Autonne, 50, 51.
Bachet, 3.
Baillaud, 30.
Baire, 18.
Barbarin, 3.
Barral, 50.
Beltrami, 11.
Berthelot, 36, 45, 46, 48.
Bertrand, 18, 37.
Bibliographie scientifique française, 51.
Bichat, 37.
Bigourdan, 30.
Biot, 31.
Blondlot, 37.
Boltzmann, 37.
Bonnel, 3.
Borel, 18.
Bossert, 31.
Bouasse, 37.
Boucharlat, 18.
Bour, 26.
Boussinesq, 18, 26, 37.
Bouty, 37.
Boys, 37.
Breithof, 10.
Bresse, 26.
Brillouin, 37.
Brioschi, 11.
Briot, 18, 38.
Brisse, 9, 10, 11, 26.
Brunhes, 16, 38.
Bull. astronomique, 51.
Bulletin de la Société astronomique, 52.
Bulletin de la Société internationale des Électriciens, 52.
Bulletin de la Société mathématique, 52.
Bulletin des sciences mathématiques, 52.
Bulletin mensuel du Bureau central météorologique, 53.
Burali-Forti, 3.
Bureau int^al des Poids et Mesures, 38.
Cahen, 3.
Callandreau, 31.
Carnoy, 9.
Carte de l'éclipse de Soleil, 31.
Caspari, 31.
Catalogue international de littérature scientifique, 12.
Catalogue de l'Observatoire de Paris, 31.
Catalogue photographique du Ciel, 31, 32.
Cauchy, 19.
Cauro, 38.
Causse, 50.
Cellérier, 26.
Chanoz, 51.
Chappuis et Berget, 38.
Chasles, 3.
Chauveau, 38.
Chevillard, 11.
Chevreul, 38, 46.
Colson, 38.
Combebiac, 19.
Comberousse (de), 3, 12, 48.
Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 53.
Congrès int^al de Chronometrie, 26.
Congrès int^al d'Electricité, 38.
Congrès int^al des mathématiciens, 19.
Congrès int^al de Physique, 39.
Connaissance des temps, 32.
Constan, 32.
Couturat, 48.
Cornu, 39.
Cremona, 26.
Cremona et Beltrami, 13.
Crookes, 39.
Curie (S.), 39.
Darboux, 4, 19.
Decante, 32.
Décombe, 46,
Demartres, 17.
Dostor, 4, 19.
Duhamel, 13, 20.
Duhem, 16, 39, 46.
Dulos, 27.
Dumas, 46.
Duporcq, 4.
Ecole Polytechnique, 48.
Encyclopédie des sciences mathématiques, 13.
Enseignement mathématique, 53.
Estanave, 20, 39.
Everett, 39.
Expériences faites à l'Exposition d'Electricité, 40.
Extrait de la Connaissance des temps, 32.
Fabry, 40.
Fassbinder.
Faure, 20.
Favaro, 27.
Faye, 32, 33.
Fermat, 20.
Féry, 46.
Flammarion, 33.
Forcrand (de), 46.
Foucault, 40.
Fouët, 20.
Fourier, 40.
Freundler, 46.
Freycinet (de), 4, 20, 26, 33.
Galois, 13, 20.
Gautier et Charpy, 46.
Gérard (A.), 48.
Gibbs, 40.
Godefroy, 20.
Gœdseels, 33.
Gonnessiat, 50.
Goursat, 20.
Greenhill, 21.
Grévy, 4, 14.
Guébhard, 40.
Guichard, 4.
Guilhon, 33.
Guillaume (Ch.-Ed.), 40, 48.

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS (*Suite*).

Guillaume (J.), 40.
Guyou, 4.
Haller, 46.
Haller et Muller, 46.
Halphen, 21.
Hement, 33.
Hermite, 14, 21.
Hermite et Stieltjes, 14.
Hildebrandsson et Teisserenc de Bort, 33.
Hirn, 33, 34, 40, 48.
Houël, 21, 34.
Houllevigue, 50.
Humbert, 21.
Huntington, 14.
Huygens, 14.
Institut de France, 15.
Intermédiaire des mathématiciens, 53.
Jamin et Bouty, 41.
Jenkin, 42.
Jordan, 21.
Jouffret, 4, 5, 27.
Journal de l'École Polytechnique, 21.
Journal de Chimie physique, 54.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 54.
Journal de Mathématiques, 54.
Journal de Physique théorique, 55.
Kœhler, 9.
Kœnigs, 5.
Lacroix, 5, 21.
La Gournerie, 11.
Lagrange, 22, 27, 34.
Lagrula, 50.
Laguerre, 15.
Laisant, 15, 22.
Laplace, 22, 23.
Laurent, 5, 23, 27.
Leau, 48.
Lebesgue, 18, 23.
Lebon, 34.
Lechalas (G.), 48.
Lemoine, 5.
Lemström, 42.
Leroy, 11.
Le Vavasseur, 51.
Lévy (Lucien), 23.
Lévy (Maurice), 27, 34.
Ligondès (du), 34.
Lindelöf, 18.
Lodge, 42.
Loomis, 34.
Lucas, 5.
Maillet, 6.
Malcyx, 6.
Mandart, 9.
Mannheim, 6, 11.
Mansion, 6.
Marchis, 42.
Marie, 15.
Martens, 27.
Martin et Pernot, 6.
Marx, 42.
Mascart, 42.
Mathias, 43.
Mathesis, 55.
Mathieu, 27, 43.
Maxwell, 43.
Mémain, 34.
Méray, 23.
Metz (de), 43.
Meyer, 6.
Michel, 9.
Miller et Kiliani, 47.
Miquel, 47.
Moniteur de la Photographie, 55.
Monod, 47.
Morel, 47.
Mottez, 43.
Mouchot, 6, 49.
Moureu, 47.
Moutier, 43.
Muller, 49.
Néculcéa, 43.
Niewenglowski (B.), 9.
Niewenglowski et Gérard, 6.
Nouvelles Annales de Mathematiques, 55.
Observatoire d'Alger, 34.
Ocagne (d'), 7, 9, 10, 11.
Oppolzer, 34.
Ostwald, 47.
Padé, .
Painlevé, 16.
Pasteur, 49.
Pellat, 43.
Perrin, 47.
Petersen, 7.
Petit Bois, 23.
Petrovitch, 43.
Picard (Emile), 23, 24, 27.
Picard et Simart, 24.
Picart (Luc), 17.
Pionchon, 7.
Poincaré, 34, 35, 44.
Presle (de), 27.
Puiseux, 35.
Raffy, 7, 24.
Raoult, 44.
Rémond, 10.
Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques, 16.
Resal, 10, 24, 27, 28, 35, 44.
Revue semestrielle des publications mathématiques, 56.
Richard, 49.
Riemann, 16, 24.
Rigollot, 50.
Riollot, 7.
Robin, 16.
Rodet et Busquet, 44.
Rouché et de Combe-rousse, 7.
Rouché et Lévy, 24.
Rouget, 35.
Rousset, 50.
Russell, 8.
Sainte-Claire Deville, 49.
Salmon, 8, 10.
Sarrau, 24, 44.
Sarrau et Vieille, 44.
Sauvage, 8, 24.
Schaffers, 44.
Schœnflless, 8.
Schwarz, 24.
Scott, 35.
Secchi, 35.
Séguier (de), 25.
Serpieri, 44.
Serret, 8, 25.
Sicard, 8.
Société française de Physique, 44, 45.
Soret, 45.
Souchon, 35.
Spée, 35.
Stieltjes, 8.
Stoffaës, 16, 25.
Sturm, 25, 28.
Tait, 25, 45.
Tannery (J.), 8, 25, 28.
Tannery (P.), 8, 35.
Thomson (J.-J.), 45.
Thomson (William), 45.
Timmermans, 28.
Tisserand, 35.
Tissot, 45.
Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, 16.
Trillat, 47.
Tyndall, 45.
Vallée-Poussin, 25.
Vieille, 28.
Villarceau et Aved de Magnac, 36.
Villié, 28.
Vivanti, 25.
Wallon, 45.
Weber, 9.
Wolf, 36.
Wyrouboff, 45.
Zeuthen, 17.

39668. — Paris, Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins. 55

University of California
SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
405 Hilgard Avenue, Los Angeles, CA 90024-1388
Return this material to the library
from which it was borrowed.

OL OCT 05 1992
NOV 01 1992

Mathematical Sciences Library
QA 7
L14
1907

AUXILIARY STACK
JUL 72

A 000 210 539 3

STATE NORMAL SCHOOL,
LOS ANGELES, CAL.